Proposition 2.4.7 *Soit A un anneau principal. On considère un A-module M tel que :*

$$M \simeq \frac{A}{(a_1)} \times \cdots \times \frac{A}{(a_q)} \tag{2.6}$$

où les a_i sont des éléments non nuls et non inversibles de A tels que $a_1|a_2|\ldots|a_q$. Alors les idéaux (a_i) sont uniquement déterminés.

Lemme 2.4.8 *Posons $M_1 = A/(a)$ et soit $p \in A$ un élément irréductible. Alors :*

1. Si $p|a$, $M_1/pM_1 \simeq A/(p)$, si $p \not| a$, $M_1/pM_1 = (0)$.
2. Si $a = p^k a_1$ avec $k \geq 1$, alors $pM_1 \simeq A/(p^{k-1}a_1)$.

Preuve Si $p \not| a$, p et a sont premiers entre eux puisque p est irréductible. La classe $\bar{p}$ de p modulo a est donc inversible dans $A/(a)$ (proposition 1.4.7) et donc $pM_1 = M_1$, d'où $M_1/pM_1 = (0)$.
Si $p|a$ considérons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "\pi"] \arrow[dr, "\tilde{\pi}"] & \\ M_1 \arrow[r, "\pi_1"] & M_1/pM_1 \, ; \end{tikzcd}$$

Le morphisme $\tilde{\pi} = \pi_1 \circ \pi$ est surjectif, et son noyau est égal à $\pi^{-1}(pM_1) = (p)$ comme on le voit immédiatement, ce qui démontre *1.*
Pour démontrer *2.*, considérons l'application canonique

$$\pi \; : \; A \longrightarrow A/(p^k a_1) = M_1.$$

On a alors $pM_1 = \pi(pA) = p\pi(A)$ puisque π est A-linéaire. Considérons maintenant l'application $\phi = \pi \circ \psi$:

$$A \longrightarrow pA \longrightarrow pM_1$$

où ψ est la multiplication par p. Cette application ϕ est surjective, et son noyau est $(\psi^{-1}(p^k a_1)) = (p^{k-1}a_1)$, d'où *2.* en appliquant la proposition 2.1.4. ∎

Lemme 2.4.9 *Soit M un A-module tel que*

$$M \simeq \frac{A}{(a_1)} \times \cdots \times \frac{A}{(a_q)} \simeq \frac{A}{(a'_1)} \times \cdots \times \frac{A}{(a'_s)},$$

les (a_i) et les (a'_i) vérifiant les hypothèses de la proposition 2.4.7. *Alors $s = q$ et $(a_1) = (a'_1)$.*

Preuve Soit p un élément irréductible de A tel que $p|a_1$. Posons $A/(p) = k$ (on sait que $A/(p)$ est un corps : *cf.* le corollaire 1.4.8 pour le cas de $\mathbf{Z}$; la démonstration est la même pour tout anneau principal). On a alors $M/pM \simeq k^q$ par le lemme 2.4.8, 1. et de même $M/pM \simeq k^{q'}$ où q' est le nombre d'éléments a'_i divisibles par p ; on a donc $q' \leq s$, d'où $q \leq s$ (puisque $q = q'$ du fait que $M/pM \simeq k^{q'}$ et de l'invariance de la dimension pour un espace vectoriel). On a donc $q = s$ par symétrie, et $p|a_1 \Leftrightarrow p|a'_1$. Soit p un diviseur irréductible de a_1 (et donc de a'_1). Supposons que $a_1 = p^k\tilde{a}_1$, $a'_1 = p^{k'}\tilde{a}'_1$ avec $p \wedge \tilde{a}_1 = 1$, $p \wedge \tilde{a}'_1 = 1$, et par exemple $k' \geq k$. Une récurrence immédiate sur l'entier k (et l'application du lemme 2.4.8, *2.* qui permet d'appliquer l'hypothèse de récurrence au module pM) montrent alors que $k = k'$ et que donc $(a_1) = (a'_1)$: *cf.* le diagramme ci-dessous. ■

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\times p"] \arrow[d, "\pi"] \arrow[dr, "\phi"] & pA \arrow[d] \\
A/p^{k-1}\tilde{a}_1 \arrow[r, "\sim"] & pA/p^k\tilde{a}_1 \,;
\end{tikzcd}$$

avec $\ker \phi = (p^{k-1}\tilde{a}_1)$.

La démonstration de la proposition 2.4.7 est maintenant immédiate par récurrence sur q : on peut recommencer la même raisonnement avec a_2 et a'_2 (sachant que $(a_1) = (a'_1)$) et ainsi de suite jusqu'à a_q et a'_q.