Exemples d'application

Sommaire de l'ouvrage

Exemples d’application du chapitre 1
Notions générales sur les fluides

Énoncé 1.1

Déterminer la densité de l’air sous un vide de 440 mm Hg, à –40 °C.

Solution 1.1

Masse moléculaire de l’air (79 % azote et 21 % oxygène, en volume) :

$$M = 0{,}79 \times 28 + 0{,}21 \times 32 = 28{,}8 \text{ kg/kmol}$$

Dans la relation 1.3, $\rho_0 = M/22{,}4$ est la densité des gaz à des conditions normales, ainsi, il vient après remplacement :

$$\rho = (M/22{,}4)273p/Tp_0 = 28{,}8 \times 273(760 - 440)/22{,}4 \times 233 \times 760$$

$$\boldsymbol{\rho = 0{,}615 \text{ kg/m}^3}$$

Énoncé 1.2

Calculer la viscosité d’une suspension d’un solide en eau, obtenue dans un récipient dans lequel, à $V = 10$ m^3 d’eau, on ajoute $m = 1\,000$ kg de produit solide.
Température de la suspension : $T = 20$ °C
Densité relative de la phase solide : $d = 1{,}2$

Solution 1.2

Volume de la phase solide :

$$V_s = m/\rho = 1\,000/1\,200 = 0{,}833 \text{ m}^3$$

Concentration volumique de la phase solide en suspension :

$$\varphi = V_s/(V + V_s) = 0{,}077 \text{ m}^3/\text{m}^3$$

À $T = 20$ °C, la viscosité de l’eau est $\mu_l = 1{,}0 \times 10^{-3}$ Pa.s. La relation 1.10 permet de déterminer la viscosité de la suspension :

$$\mu_s = \mu_l(1 + 2{,}5\varphi) = 1{,}0 \times 10^{-3}(1 + 2{,}5 \times 0{,}077)$$

$$\boldsymbol{\mu_s = 1{,}19 \times 1{,}0 \times 10^{-3} \text{ Pa.s}}$$

La même viscosité calculée avec la relation 1.11 conduit à la valeur :

$$\mu_s = \mu_l[0{,}59/(0{,}77 - \varphi)^2] = 1{,}0 \times 10^{-3} \times 0{,}59/(0{,}77 - 0{,}077)^2$$

$$\boldsymbol{\mu_s = 1{,}23 \times 10^{-3}\ \mathrm{Pa.s}}$$

Énoncé 1.3

De l'azote se trouve dans un récipient de 2,0 m^3. La pression est de 23,5 bar et la température de −128 °C. Calculer la masse d'azote contenue dans le récipient et comparer le résultat avec la valeur obtenue avec la relation du gaz parfait.

Solution 1.3

Le tableau 1.2 indique pour l'azote la paire $T_{cr} = -147{,}13$ °C et $p_{cr} = 33{,}92$ bar. On peut déterminer ensuite la pression et la température réduites :

$$p_r = p/p_{cr} = 23{,}5/33{,}92 = 0{,}7$$

$$T_{cr} = T/T_{cr} = (273{,}15 - 128)/(273{,}15 - 147{,}13) = 1{,}15$$

Un coup d'œil sur l'abaque (voir figure 1.2) nous permet de trouver pour le facteur de compressibilité : $Z = 0{,}8$.

En appliquant la relation 1.15, on trouve :

$$m = MpV/ZRT = 28 \times 10^{-3} \times 23{,}5 \times 10^5 \times 2{,}0/0{,}8 \times 8{,}314 \times 145$$

où $M = 28$ g/mol est la masse molaire de l'azote.

$$\boldsymbol{m = 136{,}5\ \mathrm{kg}}$$

Si l'on avait calculé la masse de l'azote à l'aide de la relation du gaz parfait, on aurait :

$$m^* = Zm = 0{,}8 \times 136{,}5 = 109{,}1 \text{ kg}$$

soit un écart de **20 %**.

Énoncé 1.4

Un manomètre formé par un tube en U à un seul liquide, du mercure, est relié par deux points à une canalisation horizontale transportant du gaz. La différence de niveau Δz du mercure dans le tube est de 25 mm.

Calculer la différence de pression entre les deux points, si par la canalisation passe :

a) de l'eau ;

b) de l'air à 20 °C et à la pression atmosphérique.

Solution 1.4

Puisque la pression dans un même fluide doit être égale en tout point d'un plan horizontal (figure Ex.1, plan a-a), on écrit l'égalité :

$$p_1 + z_1\rho g = \rho_2 + z_2\rho g + \Delta z \rho_{man} g$$

On obtient après remplacement de z_2 par $(z_1 - \Delta z)$:

$$p_1 - p_2 = \Delta z(\rho_{man} - \rho)g$$

relation dans laquelle ρ est la densité du fluide passant dans la canalisation, y compris dans les deux branches, et ρ_{man} la densité du liquide dans le tube manométrique.

Dans les conditions énoncées Δz = 25 mm et ρ_{man} = 13 600 kg/m^3, on déduit :

a) pour l'eau, avec ρ = 1 000 kg/m^3 :

$$p_1 - p_2 = 0{,}025(13\,600 - 1\,000)9{,}81 = \mathbf{3\,090\ Pa}$$

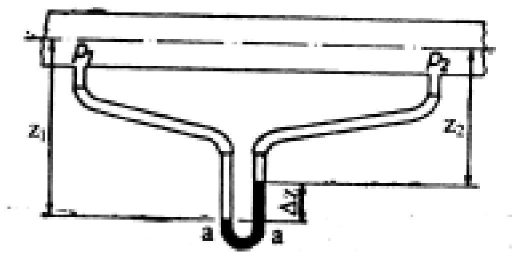
b) pour l'air à 20 °C :

$$\rho = 29 \times 273/22{,}4 \times 293 = 1{,}2\ \text{kg/m}^3$$

$$p_1 - p_2 = 0{,}025(13\,600 - 1{,}2)9{,}81 = \mathbf{3\,335\ Pa}$$

Dans cette ultime égalité il résulte que, pour l'appareil fonctionnant en manomètre différentiel à un seul liquide, on peut négliger la correction pour la densité du gaz ($\rho << \rho_{man}$).

Figure Ex.1 – Illustration de l'exercice 1.4.



Exemples d'application du chapitre 2 Écoulement des fluides

Énoncé 2.1

De l'eau chaude à T_1 = 86 °C, se trouvant dans un réservoir ouvert à la pression atmosphérique (position 1), est transvasée à l'aide d'une pompe vers un deuxième réservoir également ouvert (position 2). La pompe dont le débit volumique G_v = 37,2 m^3/h absorbe une puissance mécanique E_a = 8,2 kW. Avant d'arriver dans ce deuxième réservoir, l'eau est refroidie dans un échangeur de chaleur où elle abandonne une puissance thermique Q = 1 500 kW.

Calculer la température de l'eau à son arrivée au point 2.

Solution 2.1

L'enthalpie spécifique de l'eau à 86 °C peut être, soit lue dans les tables de vapeur, soit déterminée par le calcul (transformation à pression constante) :

$$h_1 = c_p(T_2 - T_1) = 4\,190(86 - 0) = 360 \times 10^3 \text{ J/kg}$$

avec c_p = 4 190 J/kgK, la chaleur spécifique de l'eau.
La masse volumique de l'eau à T_1 étant $\rho_1 = 1/v_1 = 1/0{,}0010325 = 968{,}5$ kg/m^3, on obtient pour le débit massique la valeur $G = G_v\rho = 0{,}01033 \times 968{,}5 = 10$ kg/s (avec v_1 volume massique donné par les tables et $G_v = 37{,}2/3\,600 = 0{,}01033$ m^3/s).
Travail massique communiqué par la pompe à l'unité de masse de liquide :

$$W = E_a/G = 8{,}2 \times 10^3/10 = 0{,}82 \times 10^3 \text{ J/kg}$$

Chaleur cédée par l'eau dans l'échangeur de chaleur :

$$Q = -1\,500/\mathrm{G} = 1\,500/10 = 150 \times 10^3 \text{ J/kg}$$

Le signe moins signifie que l'énergie a été enlevée au système.
En substituant ce résultat dans l'équation 2.9 et en négligeant la variation d'énergie cinétique due à la vitesse d'écoulement de l'eau entre les deux points, on a :

$$h_2 - 360 \times 10^3 + 9{,}8(20 - 0) = -150 \times 10^3 + 0{,}82 \times 10^3$$

On obtient l'enthalpie de l'eau au point 2 :

$$h_2 = 210{,}62 \times 10^3 \text{ J/kg}$$

ce qui donne :

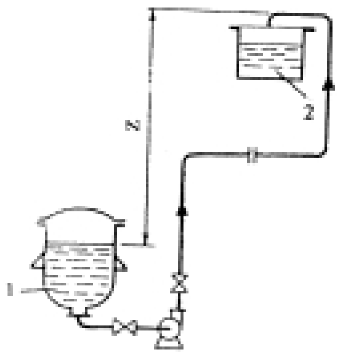
$$T_2 = h_2/c_p = 210{,}62 \times 10^3/4\,190 = 50{,}2 \text{ °C}$$

Énoncé 2.2

Un liquide ayant les caractéristiques de l'eau à T = 20 °C s'écoule librement par gravitation, à travers une conduite d = 25 mm, d'un réservoir vers un appareil de production. La différence de niveau entre les deux appareils qui respirent à l'atmosphère est Δz = 3,0 m. La longueur totale de la conduite, sur laquelle sont montés deux coudes à 90° et un robinet, est L = 8,0 m. Densité du liquide : ρ = 998 kg/m^3

Calculer le débit de liquide s'écoulant dans la conduite si le robinet est complètement ouvert.

Figure Ex.2 – Illustration de l'énoncé 2.2.



Solution 2.2

L'équation de Bernoulli appliquée entre le niveau du liquide dans le réservoir (point 1) et le bout de la conduite à l'entrée dans le réacteur (point 2) permet d'écrire (figure Ex.2) :

$$z_1 + w_1^2/2g + p_1/\rho g = z_2 + w_2^2/2g + p_2/\rho g + h_t \qquad (1)$$

Étant donné que $p_1 = p_2$ et $w_2 >> w_1$, l'équation (1) devient :

$$z_1 - z_2 = w_2^2/2g + h_f + h_s$$

ou encore :

$$\Delta z g\rho = (w_2^2\rho/2)[1 + \lambda(L/d) + \Sigma\xi] \qquad (2)$$

où h_s est la perte de charge dans les singularités et h_f la perte de charge par frottement dans la conduite.

Pour un liquide tel que l'eau, à une température ordinaire, et pour un nombre de Reynolds allant jusqu'à 100 000, ce qui est notre cas, on adopte un coefficient de frottement λ = 0,025.

La somme des coefficients de résistance locale aboutit aux valeurs :

Robinet	2,0
Entrée dans la conduite	0,5
Coude	$2 \times 1{,}1 = 2{,}2$
Total	$\Sigma\xi = 4{,}7$

Ainsi, en portant les valeurs numériques dans l'équation (2), on obtient :

$$3 \times 998 \times 9{,}81 = 998(w_2\_/2)[1 + 0{,}025(8/0{,}025) + 4{,}7]$$

d'où :

$$w_2\_ = 58{,}86/13{,}7 = 4{,}3$$

$$w_2 = 2{,}07 \text{ m/s}$$

Le débit maximal de liquide, avec un robinet totalement ouvert, sera :

$$G_v = (\pi d\_/4)w_2 = (\pi \times 0{,}025\_/4) \times 2{,}07 = 4{,}0 \times 10 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\mathbf{G_v = 3{,}6\ m^3/h}$$

Énoncé 2.3

On doit transporter, avec une conduite en acier de diamètre intérieur $d_1 = 250$ mm, un débit $G_v = 0{,}736$ m^3/s d'air dont la température est $T = 20$ °C.

À un point 2, la conduite présente une modification de diamètre (évasement), les nouvelles caractéristiques étant d_2, w_2 et p_2.

Densité de l'air à 20 °C : $\rho = 1{,}2$ kg/m^3

Viscosité dynamique de l'air à 20 °C : $\mu = 18{,}1 \times 10^{-6}$ N.s/m^2

a) Calculer le coefficient de frottement λ.

b) Calculer le diamètre d_2 en sachant que $(p_1 - p_2) = \rho w_2(w_2 - w_1)$, afin que la chute de pression due au frottement ne dépasse pas $\Delta p_f = 50$ N/m^2.

Solution 2.3

a) Pour l'écoulement en régime turbulent, on peut employer la relation de Blasius :

$$\lambda = 0{,}316/\text{Re}^{1/4} = 0{,}316/(w_1 d_1 \rho/\mu)^{1/4}$$

En explicitant la vitesse dans l'expression du débit, on a :

$$w_1 = 4G_1/\pi d_1\_$$

Il vient après remplacement de w_1 dans l'expression du coefficient de frottement :

$$\lambda = 0{,}316/(4G_v\rho/d_1\mu\pi)^{1/4}$$

d'où, avec les valeurs numériques :

$$\lambda = 0{,}316/[4 \times 0{,}736 \times 1{,}2/0{,}25 \times 1{,}81 \times 10^{-6} \times \pi]^{1/4}$$

$$\lambda = \mathbf{0{,}014}$$

b) L'équation de Bernoulli appliquée entre les points 1 et 2 s'écrit sous la forme :

$$p_1 + w_1^2\rho/2 = p_2 + w_2^2\rho/2 + \Delta p_f$$

d'où on tire pour la perte de charge :

$$\Delta p_f = (p_1 - p_2) + (w_1^2 - w_2^2)\rho/2 \qquad (1)$$

En introduisant la valeur de $(p_1 - p_2)$ en (1), on déduit :

$$\Delta p_f = [2w_2(w_2 - w_1) + w_1^2 - w_2^2]\rho/2 = (w_1 - w_2)^2\rho/2 \qquad (2)$$

Enfin, pour les points 1 et 2, l'équation de continuité permet d'écrire :

$$w_2 = w_1(A_1/A_2)$$

Ainsi l'expression (2) devient :

$$\Delta p_f = w_1^2[1 - (A_1/A_2)]^2\rho/2 = w_1^2[1 - (d_1/d_2)^2]^2\rho/2 \qquad (3)$$

Puisque la valeur maximale admise pour Δp_f est 50 N/m^2, on trouve, à partir de (3), le diamètre d_2 :

$$d_2 = d_1/[1 - (2\Delta p_f/w_1^2\rho)^{1/2}]^{1/2} = 0{,}25/[1 - (2 \times 50/15^2 \times 1{,}2)]$$

$$\boldsymbol{d_2} = \mathbf{0{,}40\ m}$$

$$w_1 = 4G_v/(\pi d_1^2) = 4 \times 0{,}736/(\pi \times 0{,}25^2) = 15 \text{ m/s}$$

Énoncé 2.4

De l'air à T = 20 °C s'écoule à travers une conduite de longueur L = 5 000 m et de diamètre intérieur d = 150 mm.
Débit volumique de l'air : Q = 0,15 m^3/s
La conduite débouche à la pression p_2 = 1,2 bar.
Calculer la pression de l'air au départ afin de maintenir le débit constant.

Solution 2.4

La différence de pression entre les deux points représente la chute de pression due au frottement. Dans ces conditions, l'équation s'écrit :

$$p_1 - p_2 = \lambda(L/d)(q/A)^2 v_m$$

À la pression atmosphérique et à 20 °C, la densité de l'air est ρ = 1,205 kg/m^3. Le débit masse d'air devient :

$$q = Q\rho = 0{,}15 \times 1{,}205 = 0{,}18 \text{ kg/s}$$

Section de la conduite d'écoulement :

$$A = \pi d^2/4 = \pi(0{,}15)^2/2 = 0{,}0176 \text{ m}^2$$

D'où la vitesse moyenne :

$$w = Q/A = 0{,}15/0{,}0176 = 8{,}52 \text{ m/s}$$

Le débit masse surfacique aura la valeur :

$$q_A = q/A = 0{,}18/0{,}0176 = 10{,}227 \text{ kg/m}^2\text{.s}$$

Avec $\mu = 0{,}0181 \times 10^{-3}$ la viscosité de l'air à $T = 20$ °C, on calcule le nombre de Reynolds :

$$\text{Re} = \rho d w/\mu = 1{,}205 \times 0{,}15 \times 8{,}52/0{,}0181 \times 10^{-3} = 85\ 000$$

En supposant que la rugosité absolue $\Delta/d = 0{,}001$, on trouve à l'aide du diagramme de Moody un coefficient de frottement $\lambda = 0{,}023$.
Le volume massique de l'air à la pression p_2 sera :

$$v_2 = (22{,}4/29)(293/273)(1/1{,}2) = 0{,}690 \text{ m}^3\text{/kg}$$

alors que le même volume à la pression p_1 s'écrit :

$$v_1 = (22{,}4/29)(293/273)(1/p_1) = 0{,}829/p_1 \text{ m}^3\text{/kg}$$

ce qui nous permet de calculer le volume moyen :

$$v_m = (v_1 + v_2)/2 = [0{,}690 + (0{,}829/p_1)]/2 = (0{,}690p_1 + 0{,}829)/2p_1$$

Il vient après remplacement des valeurs numériques dans la relation de la perte de charge :

$$p_1 - 120 \times 10^3 = 0{,}0023(5\ 000/0{,}15)(10{,}227)^2(0{,}690p_1 + 0{,}829)/2p_1$$

En regroupant, on aboutit à l'équation :

$$p_1^2 - 147\ 936p_1 - 11\ 700 = 0$$

dont la solution est :

$$p_1 = 148\ 000$$

Cela signifie que, pour garder le débit constant, la pression de l'air à son admission dans la conduite doit avoir, au moins, la valeur :

$$\boldsymbol{p_1 = 1{,}48 \textbf{ bar}}$$

Énoncé 2.5

Un débit Q (en m^3/s) de gaz chauds circule dans une canalisation de diamètre d (en m). Les gaz ont une densité $\rho = 0{,}82$ kg/m^3 et la viscosité $\mu = 1{,}23 \times 10^{-5}$ kg/m.s.
Établir une relation qui exprime le coefficient de frottement λ en fonction du débit et du diamètre de la canalisation.

Solution 2.5

Comme il s'agit d'un écoulement en régime turbulent, on peut utiliser la relation de Blasius, pour exprimer le coefficient de frottement. Ainsi :

$$\lambda = 0{,}316/\mathrm{Re}^{0,25} = 0{,}316/(\rho w d/\mu)^{0,25}$$

Or $Q = (\pi d^2/4)w$ donc $w = 4Q/\pi d^2$

Il résulte après le remplacement de w dans l'expression de λ :

$$\lambda = 0{,}316/(4\rho Q/\pi\mu d)^{0,25}$$

ou encore, après avoir introduit les valeurs de la densité et de la viscosité :

$$\boldsymbol{\lambda = 0{,}018(d/Q)^{0,25}}$$

Énoncé 2.6

Un mélange d'eau et d'air s'écoule, à une température T = 50 °C, à travers une conduite dont le diamètre intérieur d = 40 mm.

Débit masse de l'eau : G = 0,08 kg/s

Débit masse de l'air : q_m = 0,024 kg/s

Les caractéristiques physiques des fluides à T = 50 °C sont :

- densité de l'eau ρ_w = 998,1 kg/m^3
- tension superficielle de l'eau σ_w = 0,0677 N/m (J/m^2)
- viscosité de l'eau μ_w = 0,55 mPa.s
- densité de l'air ρ_a = 1,093 kg/m^3

a) Calculer, à l'aide du diagramme de Backer, le régime d'écoulement biphasique.

b) Vérifier si l'écoulement est accompagné d'un phénomène d'érosion.

Solution 2.6

a) Le débit masse par unité de surface sera :

eau $\quad G_A = 4G/\pi d^2 = 4 \times 0{,}08/\pi(0{,}04)^2 = 63{,}7$ kg/s.m^2

air $\quad q_{mA} = 4G_a/\pi d^2 = 4 \times 0{,}024/\pi(0{,}04)^2 = 19{,}1$ kg/s.m^2

Les coefficients caractérisant les fluides s'expriment par les relations :

$$k_1 = 2{,}11 \times 10^{-6}[\rho_a^{1/2}\rho_w^{7/6}/\mu_w^{1/3}\sigma_w]$$
$$k_1 = 2{,}11 \times 10^{-6}[1{,}093^{1/2} \times 998{,}1^{7/6}/(0{,}55 \times 10^{-3})^{1/3} \times 0{,}0677] = 1{,}245$$

$$k_2 = 34{,}65/(\rho_a\rho_w)^{1/2} = 34{,}65/(1{,}093 \times 998{,}1)^{1/2} = 1{,}05$$

La lecture du diagramme logarithmique de Backer nous donne les valeurs :

$$q_{mA}k_2 = 19{,}1 \times 1{,}05 = 20{,}05 \text{ kg/s.m}^2$$

$$(G_A/q_{mA})k_1 = (63{,}7/19{,}1) \times 1{,}245 = 4{,}152$$

Le point d'intersection de ces deux valeurs indique un écoulement de type **annulaire**.

b) Une indication sur l'apparition du phénomène d'érosion est donnée par l'équation :

$$\rho_m w_m^2 = 15\,000$$

où la densité moyenne :

$$\rho_m = (G_A + q_{mA})/[(G_A/\rho_w) + (q_{mA}/\rho_m)] \quad (2.87)$$

et la vitesse moyenne :

$$w_m = w_w + w_a \qquad (2.88)$$

En introduisant les valeurs numériques, on obtient :

$$\rho_m = (63,7 + 19,1)/[(63,7/998,1) + (19 \times 1/1,093)] = 4,72\ \text{kg/m}^3$$

$$w_m = w_w + w_a = (G_A/\rho_m) + (q_{mA}/\rho_m) = [(63,7/998,1) + (19 \times 1/1,093)]$$

$$w_m = 17,54\ \text{m/s}$$

ce qui permet de vérifier la condition :

$$\rho_m w_m^2 = 4,72 \times (17,54)^2 = 1\,452$$

La valeur déterminée est beaucoup trop petite pour qu'il y ait un problème quelconque d'érosion.

Exemples d'application du chapitre 3
Pompes

Énoncé 3.1

Une pompe à piston à double effet transporte un débit-volume d'eau G_v = 22,5 m^3/h.
Diamètre du piston : D = 125 mm
Diamètre de la tige : D_1 = 35 mm
Rayon de la manivelle : R = 136 mm
Vitesse de rotation : N = 62 tr/min
Calculer le coefficient de débit (rendement volumique) de la pompe.

Solution 3.1

Le volume d'eau déplacé par le piston à une rotation de manivelle sera :

$$V = (2A - A_1)L = (\pi/4)(2D^2 - D_1^2)2R$$

relation dans laquelle A et A_1 sont respectivement l'aire de la section du piston et de la tige (en m) ; $L = 2R$ signifie que la course du piston est égale au double du rayon de la manivelle (en m).

En introduisant les valeurs numériques on obtient :

$$V = (\pi/4)[2 \times (0{,}125)^2 - (0{,}035)^2]2 \times 0{,}136$$

$$V = 0{,}0064 \text{ m}^3$$

Le débit théorique de la pompe à la vitesse de rotation n = 62 tr/min devient :

$$G_{v,th} = NV = 62 \times 0{,}0064 = 0{,}397 \text{ m}^3/\text{min}$$

$$G_{v,th} = 0{,}397 \times 60 = 23{,}85 \text{ m}^3/\text{h}$$

Dès lors, on trouve facilement le coefficient de débit :

$$\eta_v = G_v/G_{v,th} = 22{,}5/23{,}85$$

$$\boldsymbol{\eta_v = 0{,}94}$$

Énoncé 3.2

Une pompe à piston à simple effet transporte un débit-volume d'eau G_v d'un réservoir où la pression p_1 = 1 bar vers un appareil de production où p_2 = 3 bar. Pour une vitesse de l'eau w = 1,4 m/s dans une conduite de diamètre d = 80 mm, les pertes de charge sont estimées à h_f = 10 m. L'appareil est situé à une hauteur Δz = 20 m.

Rendement volumétrique : η_v = 0,85

Données constructives de la pompe :

- diamètre du piston D = 150 mm
- course du piston L = 200 mm

a) Calculer la vitesse de rotation de la pompe.

b) Calculer la puissance nécessaire à la pompe avec les données suivantes :

- rendement mécanique : η_m = 0,95
- rendement hydraulique : η_h = 0,90

Solution 3.2

a) En utilisant l'expression du débit pour les pompes à piston, on peut écrire :

$$N = G_v 60/\eta_v AL$$

Le débit d'eau calculé avec l'équation du débit sera :

$$G_v = w(\pi d^2/4) = 1{,}4(\pi \times 0{,}08^2/4) = 0{,}007 \text{ m}^3/\text{s}$$

L'aire de la section du piston est égale à :

$$A = (\pi D^2/4) = (\pi \times 0{,}15^2/4) = 0{,}017 \text{ m}^2$$

En portant les valeurs numériques dans la relation donnant la vitesse de rotation, on en déduit :

$$N = 0{,}007 \times 60/0{,}85 \times 0{,}017 \times 0{,}2$$

$$\boldsymbol{N \approx 150\ \text{tr/min}}$$

b) La hauteur d'élévation de la pompe ou la hauteur totale se détermine en appliquant l'équation de Bernoulli et en considérant $w_1 = w_2$:

$$Z_{\text{m}} = \Delta p/\rho g + \Delta z + h_{\text{f}} = (3 - 1) \times 10^5/1\,000 \times 9{,}81 + 20 + 10$$

$$Z_{\text{m}} = 50{,}4\ \text{m}$$

D'où la puissance du moteur nécessaire à l'arbre de la pompe :

$$E_{\text{a}} = G_{\text{v}}\rho g Z_{\text{m}}/1\,000\eta_{\text{t}} = 0{,}007 \times 1\,000 \times 9{,}81 \times 50{,}4/1\,000 \times 0{,}855$$

$$\boldsymbol{E_{\text{a}} = 4{,}0\ \text{kW}}$$

Le rendement total est :

$$\eta_{\text{t}} = \eta_{\text{m}}\eta_{\text{h}} = 0{,}95 \times 0{,}90 = 0{,}855$$

Énoncé 3.3

La vitesse de rotation d'une pompe volumétrique à engrenages simples est $N = 480$ tr/min. Les dents, en nombre $z = 12$, ont une largeur $b = 42$ mm.

La surface de la section d'une dent, limitée par le périmètre extérieur de la roue voisine, est $S = 960\ \text{mm}^2$. La pompe doit transporter un débit d'eau $G_{\text{v}} = 0{,}4\ \text{m}^3/\text{min}$.

Calculer le coefficient de débit de la pompe.

Solution 3.3

Le débit volume de la pompe à engrenages simples s'obtient avec la relation :

$$G_{\text{v}} = \eta_{\text{v}}(2SbzN/60)$$

dans laquelle η_{v} est le coefficient de débit.

Le débit théorique d'eau transféré par la pompe sera ($\eta_{\text{v}} = 1{,}0$) :

$$G_{\text{v,th}} = 2 \times 0{,}96 \times 10^{-3} \times 0{,}042 \times 12 \times 480/60$$

$$G_{\text{v,th}} = 7{,}74 \times 10^{-3}\ \text{m}^3/\text{s}$$

Le débit réel ou effectif donné par l'énoncé est $G_{\text{v}} = 0{,}4/60 = 6{,}66 \times 10^{-3}\ \text{m}^3/\text{s}$

Dès lors, on obtient le coefficient de débit :

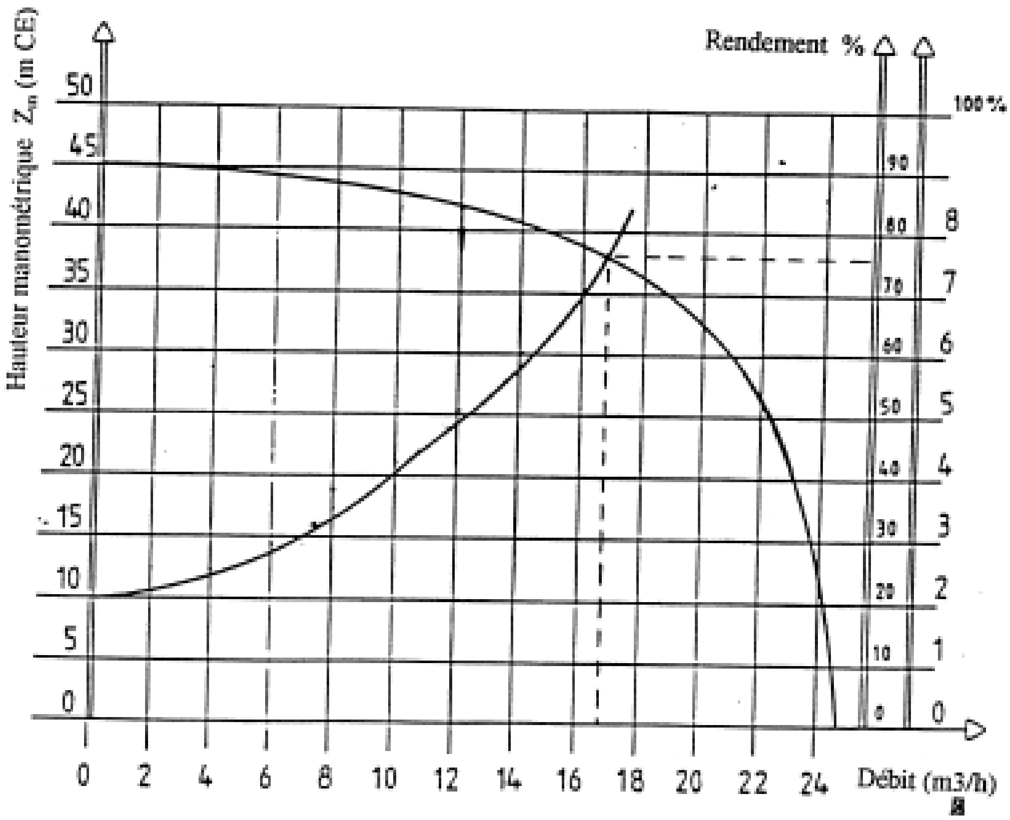
$$\eta_{\text{v}} = G_{\text{v}}/G_{\text{v,th}} = 6{,}66 \times 10^{-3}/7{,}74 \times 10^{-3}$$

$$\boldsymbol{\eta_{\text{v}} = 0{,}86}$$

Énoncé 3.4

Soit une pompe centrifuge dont les caractéristiques pour une vitesse de rotation N = 2 500 tr/min sont représentées sur la figure Ex.3. La pompe transvase de l'eau entre deux appareils distants d'une longueur L = 20 m et d'une hauteur Δz = 10 m.

Figure Ex.3 – Illustration pour les énoncés 3.4 et 3.6.



Diamètre intérieur des tubulures : d = 40 mm
Longueur équivalente due aux pertes de charge singulières : h_f = 80 m
Rendement électrique du moteur : η_{el} = 0,95
Rendement de transmission : η_{tr} = 0,9
Les deux appareils respirent à la pression atmosphérique.
a) Calculer le débit-volume de la pompe.
b) Calculer la puissance sur l'arbre de la pompe.

Solution 3.4

a) L'application de l'équation de Bernoulli se rapportant aux fluides réels à un circuit contenant une pompe conduit à la relation :

$$Z_m = (z_2 - z_1) + (w_2^2 - w_1^2)/2g + (p_2 - p_1)/\rho g + h_f$$

Et en tenant compte de l'énoncé du problème, on peut faire les deux hypothèses $p_1 = p_2$ et $(w_2^2 - w_1^2)$, à négliger par rapport à h_f. Ainsi la relation de Bernoulli se réduit à :

$$Z_m = 10 + h_f$$

Il s'ensuit que la perte de charge sur la conduite reliant les deux appareils est une fonction du débit G_v et de la hauteur manométrique Z_m à fournir par la pompe.
Le calcul de h_f se fait avec la formule classique :

$$h_f = \lambda(L/d)\rho w^2/2g$$

En supposant l'écoulement turbulent et les conduites neuves, on utilise l'expression de Blasius pour déterminer le coefficient de frottement :

$$\lambda = 0{,}3164/\mathrm{Re}^{0{,}25} = 0{,}3164/(wd\rho/\mu)^{0{,}25}$$

que l'on introduit dans l'équation de h_f :

$$h_f = 0{,}0161(\mu/\rho)^{0{,}25}(w)^{1{,}75}L/(d)^{1{,}25}$$

En exprimant la vitesse par l'équation de débit, il vient, après remplacement des valeurs disponibles :

- $d = 0{,}040$ mm
- $L = 20 + 80 = 100$ m
- $\rho = 1\ 000$ kg/m^3
- $\mu = 1{,}0$ mPa.s
- $h_f = 0{,}0161(\mu/\rho)^{0{,}25}(4G_v/\pi d^2)^{1{,}75}L/(d)^{1{,}25}$
- $h_f = 344{,}4 \times 10^3 G_v^{1{,}75}$

Dès lors, la hauteur manométrique devient :

$$Z_m = 10 + 344{,}4 \times 10^3 G_v^{1{,}75}$$

En divisant G_v par 3 600 (les courbes caractéristiques de la pompe sont exprimées en m^3/h), on en déduit :

$$Z_m = 10 + 0{,}2058 G_v^{1{,}75}$$

La courbe que l'on peut construire avec cette équation coupe la courbe caractéristique, pour $N = 2\ 500$ tr/min, au point F, défini par $Z_m = 38{,}4$ m et **$G_v = 16{,}7$ m^3/h**
Disposant de la valeur du débit, on peut vérifier les hypothèses admises :

- nombre de Reynolds :

$$\mathrm{Re} = 3{,}7 \times 0{,}04 \times 1\ 000/10^{-3} = 148\ 000 \qquad \text{écoulement turbulent}$$

- hauteur dynamique :

$$w^2/2g = (3{,}7)^2/2 \times 9{,}81 = 0{,}7 \text{ m} \qquad 2{,}5\ \%\ \text{acceptable}$$

avec $w = (G_v/3\ 600)/(4/\pi 0{,}04^2) = 3{,}7$ m/s

b) Le calcul numérique de la puissance sur l’arbre de la pompe s’effectue avec la relation :

$$E_a = G_v \rho g Z_m / \eta_g = (16{,}7/3\,600) \times 1\,000 \times 9{,}81 \times 38{,}4/0{,}65$$

$$\boldsymbol{E_a = 2\,689\ \mathrm{W}}$$

dans laquelle, le rendement global est donné par :

$$\eta_g = \eta_{el}\eta_{tr}\eta_t = 0{,}95 \times 0{,}9 \times 0{,}76 = 0{,}65$$

La valeur du rendement total se rapportant au point F est lue sur la courbe caractéristique de la pompe.
Avec une réserve de puissance de 1 kW, on va choisir un moteur de 3,75 kW, voire même 4 kW.

Énoncé 3.5

Une pompe centrifuge transporte de l’eau à T = 20 °C, entre deux points (réservoir-appareil) distancés de L = 125 m (y compris la dénivellation Δz = 25 m), à travers une conduite de diamètre d = 100 mm.
Débit véhiculé : $G_v = 0{,}008\ m^3/s$
Densité de l’eau à 20 °C : $\rho = 998\ kg/m^3$
Viscosité dynamique de l’eau à 20 °C : μ = 1,0 mPa.s
Rendement total de la pompe : $\eta_t = 0{,}7$
a) Calculer les pertes de charge totales par friction.
b) Calculer la puissance du moteur nécessaire à la pompe.

Solution 3.5

a) Vitesse de l’eau dans la conduite :

$$w = G_v/A_0 = 0{,}008/0{,}00785 = 1{,}02\ m/s$$

où $A_0 = \pi d^2/4 = \pi(0{,}1)^2/4 = 0{,}00785\ m^2$
Étant donné les caractéristiques du fluide, l’écoulement sera certainement de type turbulent.
Nombre de Reynolds :

$$\mathrm{Re} = wd\rho/\mu = 0{,}1 \times 1{,}02 \times 998/1 \times 10^3 = 101\,700$$

Les pertes de charge par friction, exprimées en J/kg, se composent :
1. de pertes par contraction à la sortie du réservoir :

$$C_1 = 0{,}55(1 - A_1/A_0) = 0{,}55(1 - 0) = 0{,}55$$

puisque la section du réservoir $A_1 >> A_0$ et où C_1 est le coefficient de contraction.
D’où la perte de charge :

$$F_1 = C_1 w^2/2 = 0{,}55 \times [(1{,}02)^2/2] = 0{,}286\ J/kg$$

2. de pertes dans la conduite droite :

$$F_2 = (\lambda L/d)(w^2/2) = 0{,}02 \times 125/0{,}1)[(1{,}02)^2/2] = 13{,}005 \text{ J/kg}$$

où, pour Re = 100 000 et ε/d = 0,0004 sur le diagramme de Moody (voir figure 2.7), on a un coefficient de frottement λ = 0,02.

3. de pertes dans les coudes :

$$F_3 = 2C_3(w^2/2) = 2 \times 0{,}75[(1{,}02)^2/2] = 0{,}780 \text{ J/kg}$$

4. de pertes par friction à l'entrée dans l'appareil (orifice profilé hydrodynamique) :

$$C_4 = (1 - A_0/A_2)^2 = 1{,}0$$

avec $F_4 = C_4 w^2/2 = 1{,}0 \times [(1{,}02)^2/2] = 1{,}04$ J/kg

Les pertes totales représentent la somme des pertes énumérées :

$$F_t = \Sigma F = 0{,}286 + 13{,}005 + 0{,}780 + 1{,}04$$

$$\boldsymbol{F_t = 15{,}111 \text{ J/kg}}$$

b) L'énergie spécifique de pompage est obtenue à partir de la relation :

$$W = g\Delta z + F = 9{,}81 \times 25 + 15{,}11 = 260{,}11 \text{ J/kg}$$

dans laquelle on a posé $w_1 = w_2$ et $p_1 = p_2$

L'énergie spécifique effective vaut alors :

$$W_{ef} = W/\eta_t = 260{,}11/0{,}7 = 371{,}6 \text{ J/kg}$$

Étant donné que le débit masse $G = G_v\rho = 0{,}008 \times 998 = 7{,}98$ kg/s, on en déduit pour la puissance nécessaire à l'arbre de la pompe :

$$E = GW_{ef} = 7{,}98 \times 371{,}6/1\,000$$

$$\boldsymbol{E = 2{,}96 \text{ kW}}$$

Énoncé 3.6

Une pompe centrifuge sert à transvaser de l'eau vers un appareil situé à Δz = 30 m plus haut que le plan de la pompe.

Largeur de la conduite de refoulement : L = 100 m

Diamètre intérieur de la conduite de refoulement : d = 50 mm

Rugosité relative de la paroi : Δ/d = 0,002

Calculer, à l'aide de la courbe caractéristique hauteur manométrique/débit (voir figure Ex.3), le débit d'eau arrivant à l'appareil si la vanne, sur la conduite après la pompe, est complètement ouverte.

Solution 3.6

La puissance développée par la pompe doit élever le débit d'eau à la hauteur Δz et en même temps vaincre la perte de charge dans la conduite due au frottement.
En négligeant l'énergie cinétique, une équation de bilan entre les points 1 (pompe) et 2 (appareil) permet d'écrire :

$$g\Delta z + \Delta p/\rho = -\Delta p_f /\rho$$

ou encore :

$$\Delta z + \Delta p/\rho g = -\lambda(L/d)w^2/2g$$

Puisque $\Delta p = p_2 - p_1 \cong -p_1$ et $\Delta p/\rho g = Z_m$, l'équation de bilan devient :

$$30 - Z_m = -\lambda(300/0{,}05)w^2/2 \times 9{,}81 \quad (1)$$

Étant donné que les valeurs de p_1 et w sont inconnues, on doit procéder par essais ; on donne une valeur fictive à la vitesse de l'eau w et ensuite on vérifie l'égalité (1).
On fait un premier essai avec w = 1,5 m/s. Le débit volume d'eau aura la valeur :

$$G_v = wA_0 \times 3\,600 = 1{,}5 \times (\pi/4)0{,}05^2 \times 3\,600 = 1{,}5 \times 1{,}96 \times 10^3 \times 3\,600$$

$$G_v = 10{,}6 \text{ m}^3/\text{h}$$

à laquelle correspond une hauteur manométrique Z_m = 43,0 m.
Le nombre de Reynolds

$$\text{Re} = wd\rho/\mu = 1{,}5 \times 0{,}05 \times 1\,000/1{,}0 \times 10^3 = 75\,000$$

permet de déterminer le coefficient de frottement dans le diagramme de Moody ; pour Δ/d = 0,002, on trouve λ = 0,026.
En remplaçant w et λ dans (1), on obtient :

$$30 - 43{,}0 = -0{,}026(100/0{,}05)1{,}5^2/2 \times 9{,}81$$

$$\text{soit } -13{,}0 \neq -6{,}0$$

La valeur prise pour la vitesse étant trop petite, on refait le calcul avec w = 2,0 m/s. Le débit d'eau transportée devient :

$$G_v = wA_0 \times 3\,600 = 2{,}0 \times (\pi/4)0{,}05^2 \times 3\,600 = 2{,}0 \times 1{,}96 \times 10^3 = 14{,}1 \text{ m}^3/\text{h}$$

valeur qui conduit à une hauteur manométrique Z_m = 40,5 m.
Le nombre de Reynolds vaut :

$$\text{Re} = wd\rho/\mu = 2{,}0 \times 0{,}05 \times 1\,000/1{,}0 \times 10^3 = 100\,000$$

Le diagramme de Moody nous donne, pour une rugosité Δ/d = 0,002, un coefficient de frottement λ = 0,0256.
En portant ces valeurs dans (1), on a :

$$30 - 40{,}5 = -0{,}0256(100/0{,}05)2{,}0^2/2 \times 9{,}81$$

$$\text{soit } -10{,}5 = -10{,}44$$

Les valeurs de l'égalité étant très proches, on peut accepter w = 2,0 m/s, ce qui conduit au débit recherché :

$$\mathbf{G_v = 14{,}1\ m^3/h}$$

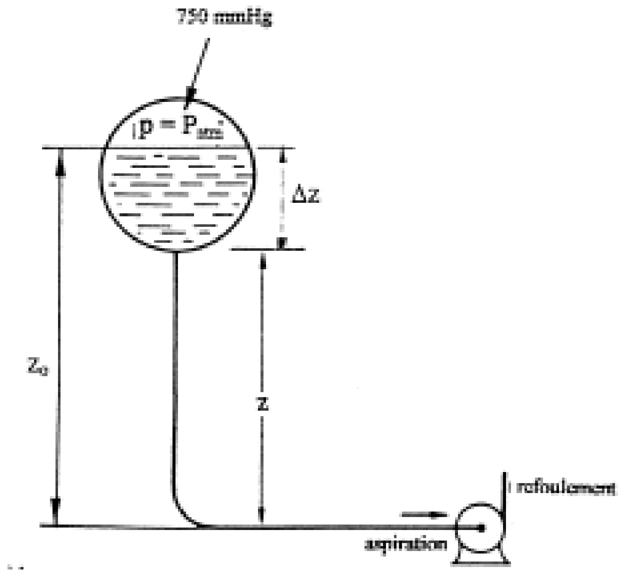
Énoncé 3.7

De l'eau de condensation, à T = 90 °C, doit être pompée par une pompe centrifuge d'un collecteur ayant une respiration à la pression atmosphérique (p_{atm} = 750 mm Hg).

La charge de liquide ($NPSH_p$) nécessaire à la tubulure d'aspiration de la pompe doit être supérieure de 2,5 m à la valeur de la tension de vapeur donnée pour l'eau à 90 °C, afin d'éviter la cavitation.

En admettant une perte de charge dans la conduite d'aspiration h_f = 1,2 m et en sachant que la pompe se trouve située à z_1 = 2,0 m sous le condenseur, calculer le niveau minimal de l'eau dans le condenseur nécessaire pour éviter la cavitation (montage de la figure Ex.4).

Figure Ex.4 – Illustration pour l'énoncé 3.7.



Solution 3.7

En écrivant une équation simplifiée d'énergie pour le système (entre le niveau du liquide dans le collecteur et la pompe), on exprime la hauteur manométrique de charge à la tubulure d'aspiration par :

$$Z_m = p/\rho g + \Delta z_0 - h_f$$

La marge de sécurité $NPSH_p$ (supplément minimal de pression) dont il faut tenir compte pour éviter la cavitation est :

$$NPSH_p = Z_m - (p_v/\rho g) = (p_{atm}/\rho g - p_v/g) + z_0 - h_f$$

avec p_{atm} = 750 mm Hg = 100 kN/m^2 et p_v = 611 mm Hg = 81,466 kN/m^2 la pression de vapeur saturante à T = 90 °C.
En introduisant les valeurs numériques, il vient :

$$2{,}5 = (100 - 81{,}466)10^3/1\,000 \times 9{,}81 + z_0 - 1{,}2$$

d'où :

$$z_0 = 2{,}5 + 1{,}6 - 1{,}9 = 2{,}2 \text{ m}$$

On en déduit le niveau minimal de liquide dans le collecteur :

$$\Delta z = z_0 - z_1 = 2{,}2 - 2{,}0$$

$$\mathbf{\Delta z = 0{,}2\ m}$$

Énoncé 3.8

Afin d'augmenter le débit et/ou la pression dans l'adduction d'eau, deux pompes sont couplées :

- en série, avec Z_{m1} = 25 m, Z_{m2} = 40 m, η_1 = 0,70 et η_2 = 0,75
- en parallèle, avec $G_{v1} = G_{v2}$ = 25 m^3/h, η_1 = 0,70 et η_2 = 0,75

a) Calculer le rendement du couplage pour chaque type de montage.
b) En supposant les pompes identiques ($\eta_{1,2}$ = 0,8), calculer leur rendement total.

Solution 3.8

a) Pour le couplage des pompes en série, la hauteur manométrique totale est égale à la somme des hauteurs manométriques de chaque pompe. On peut donc écrire :

$$Z_{mt} = Z_{m1} + Z_{m2}$$

$$G_{vt} = G_{v1} = G_{v2}$$

$$E_t = E_1 + E_2$$

On calcule le rendement du montage :

$$\eta_t = E_u/E_t = \rho g G_{vt} Z_{mt}/[(\rho g G_{v1} Z_{m1}/\eta_1) + (\rho g G_{v2} Z_{m2}/\eta_2)]$$

$$\eta_t = (25 + 40)/[(25/0{,}7) + (40/0{,}75)]$$

$$\boldsymbol{\eta_t = 0{,}73}$$

Dans le cas d'un couplage en parallèle, le débit de l'installation sera égal à la somme des débits de chaque pompe. Cela nous permet d'écrire :

$$Z_{mt} = Z_{m1} = Z_{m2}$$

$$G_{vt} = G_{v1} + G_{v2}$$

$$E_t = E_1 + E_2$$

Le rendement total est dans ce cas :

$$\eta_t = E_u/E_t = \rho g G_{vt} Z_{mt}/[(\rho g G_{v1} Z_{m1}/\eta_1) + (\rho g G_{v2} Z_{m2}/\eta_2)]$$

$$\eta_t = (25 + 25)/[(25/0,7) + (25/0,75)]$$

$$\boldsymbol{\eta_t = 0,724}$$

b) Si les pompes sont identiques, $\eta_1 = \eta_2 = 0,8$. Le rendement total sera :

- pour le montage en série :

$$\eta_t = (Z_{m1} + Z_{m2})/(Z_{m1} + Z_{m2})/\eta_1$$

$$\boldsymbol{\eta_t = \eta_1 = 0,8}$$

- pour le montage en parallèle :

$$\eta_t = (G_{v1} + G_{v2})/(G_{v1} + G_{v2})/\eta_1$$

$$\boldsymbol{\eta_t = \eta_1 = 0,8}$$

On remarque que, dans les deux situations, les rendements sont les mêmes :

$$\eta_t = \eta_1 = \eta_2$$

Énoncé 3.9

De l'eau est aspirée d'un puits avec une pompe air-lift. Le puits est profond de $Z_t = 120$ m et le niveau de l'eau se trouve à $Z_p = 50$ m de la surface.
Débit d'air consommé $Q = 5$ m^3/min, à une pression de compression $p_2 = 7$ bar.
Compression isentropique avec $\chi = 1,4$.
Travail théorique effectif réalisé par la pompe : $E_t = 21,6$ kJ/s
Rendement de la pompe air-lift : $\eta_p = 20$ %
a) Calculer le débit d'eau que l'on peut monter avec cette pompe si le diamètre de la conduite est $d = 80$ mm.
b) Calculer la vitesse moyenne du mélange air-eau dans la conduite.

Solution 3.9

a) L'analyse fait appel à l'expression donnant le travail nécessaire pour une compression de l'air adiabatique :

$$p_1 Q[\chi/(\chi - 1)][(p_2/p_1)^{(\chi/(\chi-1)} - 1] = 1 \times 10^5 \times 0,083[(1,4/0,4)][(7/1)^{1,4/0,4} - 1]$$

$$= 21{,}6 \text{ kJ/s}$$

où Q = 5 m^3/min = 0,083 m^3/s
Puissance nécessaire pour cette compression : E_t = 21,6 kJ/s
Nous obtenons la puissance utile de la pompe :

$$E_u = 20E_t/100 = 0{,}2 \times 21{,}6 = 4{,}32 \text{ kW}$$

Le débit d'eau élevé à la surface se calcule à partir de la puissance utile E_u :

$$G = E_u/Z_p g = 4\,320/50 \times 9{,}81 = 8{,}81 \text{ kg/s}$$

$$G_v = 8{,}81 \times 3\,600/1\,000$$

$$\boldsymbol{G_v = 31{,}7 \text{ m}^3\text{/h}}$$

b) La vitesse moyenne dépend de la pression de l'air dans la conduite. En tenant compte de $Z_s = Z_t - Z_p$ = 120 – 50 = 70 m, la pression à la base du puits est considérée comme étant Z_s = 70 m CE, on trouve alors :

$$p_1 = Z_s \rho g = 70 \times 1\,000 \times 9{,}81$$

$$\boldsymbol{p_1 = 686{,}7 \text{ kN/m}^2}$$

La pression à la surface est la pression atmosphérique, donc p_2 = 100 kN/m^2
La moyenne de pression est :

$$p_m = (p_1 + p_2)/2 = (686{,}7 + 100)/2 = 393{,}35 \text{ kN/m}^2$$

Le volume spécifique de l'air à cette pression et à 0 °C sera :

$$v_a = (22{,}4/29)(100/393{,}35) = 0{,}196 \text{ m}^3\text{/kg}$$

Dans des conditions standard, le volume spécifique de l'air a une valeur de :

$$V_{a0} = 22{,}4/29 = 0{,}772 \text{ m}^3\text{/kg}$$

d'où Q_0 = 0,083/0,772 = 0,107 kg/s
On obtient les débits d'air et d'eau :

- débit-volume moyen de l'air :

$$Q_m = Q_0 v_a = 0{,}107 \times 0{,}196 = 0{,}02 \text{ m}^3\text{/s}$$

- débit-volume d'eau :

$$G_{vw} = G/\rho_w = 8{,}81/1\,000 = 0{,}0088 \text{ m}^3\text{/s}$$

- débit-volume total du mélange :

$$G_{m.mel} = Q_m + G_{vw} = 0{,}02 + 0{,}0088 = 0{,}0288 \text{ m}^3\text{/s}$$

On calcule la vitesse moyenne du mélange air-eau dans la conduite, avec $A_0 = \pi(0{,}08)^2/4 = 5{,}024 \times 10^3$ m^2 :

$$w_m = G_{v.mel}/A_0 = 0{,}0288/(\pi d^2/4) = 0{,}0288/5{,}024 \times 10^{-3}$$

$$\boldsymbol{w_m = 5{,}73 \text{ m/s}}$$

Énoncé 3.10

On sait que, dans une pompe et sur les conduites d'aspiration et de refoulement, il y a une dégradation de l'énergie due aux pertes de charge diverses.

En considérant un débit d'eau transporté par la pompe à $T = 20$ C, on constate que, pour une hauteur d'élévation effective $\Delta z = 7$ m et une augmentation de pression de $p_1 = 1$ bar à $p_2 = 8$ bar, la variation de la température de l'eau est $\Delta T = 0{,}3$ °C.

Calculer le rendement mécanique de la pompe.

Solution 3.10

Par unité de masse, le travail dépensé afin d'augmenter la pression du débit d'eau au niveau prévu s'écrit :

$$W = g[(p_2 - p_1)/\rho g + \Delta z]/\eta_m = 9{,}81[(8 - 1)/1\,000 \times 9{,}81 + 7]/\eta_m$$

$$W = 786{,}6/\eta_m \qquad (1)$$

Par ailleurs, d'après l'équation 1.12 dans laquelle on considère l'énergie calorique introduite dans le système $Q = 0$, on a :

$$W = (h_2 - h_1) + g\Delta z$$

où W est le travail d'entraînement reçu par l'arbre de la machine (en J/kg) et $(h_2 - h_1)$ la variation effective de l'enthalpie de l'eau (en J/kg).

Étant donné que $h_2 - h_1 = c_p\Delta T = 4\,180 \times 0{,}3 = 1\,254$ J/kg, on déduit le travail fourni à l'arbre :

$$W = 1\,254 + (9{,}81 \times 7) = 1\,322{,}67 \text{ J/kg}$$

Il vient après l'introduction de cette valeur dans (1) :

$$\eta_m = 786{,}6/1\,322{,}67 = 0{,}6$$

Énoncé 3.11

Une pompe à diaphragme dont la capacité délivrée à chaque coup de piston est $V = 10$ dm^3 fonctionne avec une vitesse de rotation $N = 60$ tr/min. Soit $E = 6$ kW la puissance moyenne communiquée au fluide.

a) Calculer la pression différentielle fournie par la pompe en sachant que $\eta = 1{,}0$.

b) Calculer la précision sur le débit si la vitesse de rotation de l'axe d'entraînement varie de 2 tr/min.

Solution 3.11

a) Le débit de la pompe se déterminant avec $G_v = V(N/60) = 0{,}01 \times (60/60) = 0{,}01$ m^3/s, on obtient la pression différentielle :

$$\Delta p = E/\eta G_v = 6\,000/1 \times 0{,}01 = 6 \times 10^5 \text{ N/m}^2$$

$$\mathbf{\Delta \boldsymbol{p} = 6 \text{ bar}}$$

b) Le débit étant proportionnel à la vitesse de rotation, il s'ensuit qu'une variation de la vitesse de rotation implique une variation du débit ; on obtient ainsi :

$$\Delta N/N = \Delta G_v/G_v$$

d'où :

$$\Delta G_v/G_v = (2/60) \times 100 = 3{,}33\ \%$$

$$\Delta G_v = 0{,}033 \times 0{,}01 = 0{,}33 \times 10^{-3} \text{ m}^3\text{/s}$$

Exemples d'application du chapitre 4 Installations à jet

Énoncé 4.1

Un fluide gazeux ($\chi = 1{,}3$), qui entre dans un ajutage convergent-divergent à la température $T_1 = 250$ °C, subit une détente adiabatique de manière que, dans la section de sortie, la pression soit $p_2 = 1{,}1 \times 10^5$ N/m^2.

a) Calculer la pression du gaz à l'entrée dans l'ajutage, en sachant que la détente provoque une baisse de température de 30 %.

b) Calculer la vitesse du gaz à sa sortie de l'ajutage.

Solution 4.1

a) Pour déterminer la pression p_1, on part de la relation :

$$(T_2/T_1) = (p_2/p_1)^{(\chi - 1)/\chi}$$

que l'on peut écrire aussi sous la forme :

$$(p_2/p_1) = (T_2/T_1)^{\chi/(\chi - 1)}$$

Ainsi, on tire pour la pression de sortie :

$$p_2 = p_1(T_2/T_1)^{\chi/(\chi - 1)}$$

Avec les valeurs numériques $T_1 = 250 + 273 = 523$ K et $T_2 = 0{,}7T_1 + 273 = 0{,}7 \times 250 + 273 = 448$ K, on obtient :

$$p_1 = 1{,}1 \times 10^5(523/448)^{1{,}3(1{,}3 - 1)}$$

$$\boldsymbol{p_1} \mathbf{= 2{,}15 \times 10^5 \text{ N/m}^2}$$

b) En considérant que la vitesse w_1 à l'entrée de la tuyère est négligeable par rapport à w_2, la relation 4.6 nous permet d'écrire :

$$w_2 = \{2(\chi/\chi - 1)p_1v_1[1 - (p_2/p_1)^{(\chi - 1)/\chi}]\}^{1/2} = \{2(\chi/\chi - 1)RT_1[1 - (p_2/p_1)^{(\chi - 1)/\chi}]\}^{1/2}$$

$$w_2 = \{2(1{,}3/1{,}3 - 1)287 \times 523[1 - (1{,}1 \times 10^5/2{,}15 \times 10^5)^{(1{,}3 - 1)/1{,}3}]\}^{1/2}$$

$$\boldsymbol{w_2 = 431{,}7\ \mathbf{m/s}}$$

Énoncé 4.2

Une tuyère de Laval a les caractéristiques de construction et de fonctionnement suivantes :

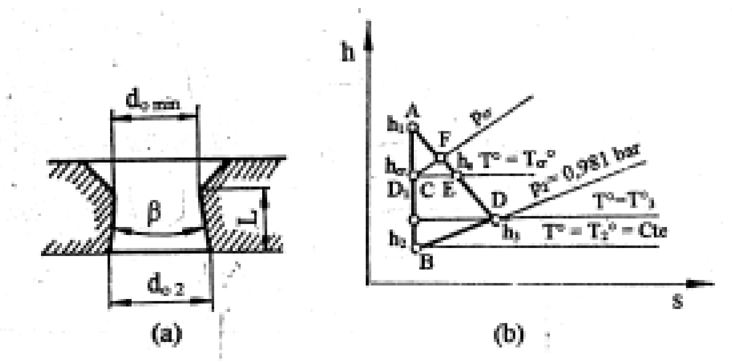
- fluide : air parfait [$\chi = 1{,}40$]
- détente isentrope de $p_1 = 10$ bar et $T_1 = 300$ °C à $p_2 = 1$ bar
- débit d'air $Q = 4$ kg/s
- angle d'ouverture de la partie supersonique $\beta = 10°$
- vitesse initiale nulle

Calculer la longueur de la partie divergente de la tuyère :

a) dans le cas où l'écoulement se fait sans frottement dans la tuyère ;

b) si l'écoulement se fait avec frottement (coefficient de vitesse φ).

Figure Ex.5 – Illustration pour l'énoncé 4.2.



Solution 4.2

a) La pression au col de la tuyère sera :

$$p_{cr} = p_1[2/(\chi + 1)]^{(\chi/\chi - 1)} = 10[2/(1{,}4 + 1)]^{1{,}4/1 - 0{,}4} = 10 \times 0{,}5283$$

$$p_{cr} = 5{,}283 \text{ bar}$$

D'où la température critique :

$$T_{cr} = T_1[2/(\chi + 1)] = 527 \times [2/(1,4 + 1)] = 527 \times 0,8333 = 477,5 \text{ K}$$

Et la vitesse de l'air dans la section minimale :

$$w_{cr} = (\chi r T_{cr})^{1/2} = (1,4 \times 287,5 \times 477,5)^{1/2} = 438 \text{ m/s}$$

Le volume spécifique de l'air aux conditions critiques aura la valeur :

$$v_{cr} = rT_{cr}/p_{cr} = 287,5 \times 477,5/5,283 \times 10^5 = 0,260 \text{ m}^3\text{/kg}$$

D'après l'équation générale du débit massique, l'aire de la section d'écoulement au col de la tuyère devient :

$$A_{min} = Qv_{cr}/w_{cr} = 4 \times 0,260/438 = 0,00237 \text{ m}^2$$

d'où le diamètre :

$$d_{min} = (4A_{min}/\pi)^{1/2} = (4 \times 0,00237/\pi)^{1/2} = 0,0055 \text{ m} = 55 \text{ mm}$$

On calcule la vitesse de l'air à sa sortie de la tuyère :

$$w_2 = \{2(\chi/\chi - 1)p_1v_1[1 - (p_2/p_1)^{(\chi - 1/\chi)}]\}^{1/2}$$

$$w_2 = \{2(1,4/1,4 - 1)10 \times 10^5 \times 0,165[1 - (1/10)^{(1,4 - 1/1,4)}]\}^{1/2} = 746 \text{ m/s}$$

$$v_1 = rT_1/p_1 = 287,5 \times 573/10 \times 10^5 = 0,165 \text{ m}^3\text{/kg}$$

Le volume spécifique de l'air à la sortie de la tuyère est donné par la relation :

$$v_2 = v_1(p_1/p_2)^{(1/\chi)} = 0,165(10/1)^{1/1,4} = 0,855 \text{ m}^3\text{/kg}$$

Dans ces conditions, on obtient l'aire de la section de sortie :

$$A_2 = Qv_2/w_2 = 4 \times 0,855/746 = 0,00458 \text{ m}^2$$

d'où, il résulte pour le diamètre :

$$d_2 = (4A_2/\pi)^{1/2} = (4 \times 0,00458/\pi)^{1/2} = 0,0077 \text{ m} = 77 \text{ mm}$$

La longueur de la partie divergente pour un angle d'ouverture $\beta = 10°$ (figure Ex.5a) devient :

$$L = (d_2 - d_{min})/2\text{tg}5 = (77 - 55)/2 \times 0,0875 = 125,7 \text{ mm}$$

$$\boldsymbol{L = 12,6 \text{ cm}}$$

b) L'écoulement de l'air avec frottement est représenté sur le diagramme *h-s* (figure Ex.5b) par la droite A-D ; le point F correspond à la section de la tuyère où la vitesse d'écoulement est égale à la vitesse locale du son, et le point C, à la section minimale de cette même tuyère. On peut donc écrire :

$$\text{D}_1\text{D/CE} = \text{AD}_1\text{/AC}$$

et, étant donné que $\Delta h/\Delta s = T$, on exprime ces segments de droite par :

$$\text{D}_1\text{D} = (h_3 - h_2)/T_3$$

$$CE = (h_s - h_{cr})/T_s$$

À l'aide de l'équation de l'écoulement adiabatique pour les gaz, il résulte :

$$h_3 - h_2 = w_2^2(1 - \varphi^2)/2$$

$$h_1 - h_3 = \varphi^2 w_2^2/2$$

$$h_s - h_{cr} = w_{cr}^2(1 - \varphi_1^2)/2$$

$$h_1 - h_{cr} = \varphi_1^2 w_{cr}^2/2$$

dans lesquelles φ_1 est le coefficient de vitesse se rapportant au convergent et φ le coefficient de vitesse relatif à la tuyère entière.
À partir de ce système d'équations, on déduit la relation :

$$[(1 - \varphi^2)/\varphi^2](T_s/T_3) = (1 - \varphi_1^2)$$

d'où, après remplacement des températures T_s et T_3 par T_{cr} et T_2 qui sont sensiblement égales, on obtient :

$$\varphi_1^2 = 1 - [(1 - \varphi^2)/\varphi^2](T_{cr}/T_2)$$

Par ailleurs, la température de l'air à la sortie pour l'écoulement sans frottement a la valeur :

$$T_2 = T_1(p_1/\mathrm{p}_2)^{(1-\chi)/\chi} = 537 \times (10/1)^{(1,4-1/1,4)} = 294 \text{ K}$$

Ainsi on peut calculer le coefficient de vitesse caractérisant le divergent :

$$\varphi_1 = \{1 - [(1 - 0,96\_)/0,96^2](477/294)\}^{1/2} = 0,94$$

et la vitesse minimale :

$$w_{min} = \varphi_1 w_{cr} = 0,94 \times 438 = 411 \text{ m/s}$$

La température minimale sera dès lors :

$$T_{min} = T_{cr} + (1 - \varphi_1^2)^{(1-\chi)/\chi} w_{cr}^2/2r = 477 + (1 - 0,94^2)^{(1-1,4)/1,4}$$

$$T_{min} = 484 \text{ K}$$

Calculons l'aire de la section minimale de la tuyère :

$$A_{min} = Qv_{min}/w_{min} = QrT_{min}/w_{min}p_{cr} = 4 \times 287,5 \times 484/411 \times 5,283 \times 10^5$$

$$A_{min} = 0,00256 \text{ m}^2$$

valeur qui nous permet de trouver d_{min} :

$$d_{min} = (4A_{min}/\pi)^{1/2} = (4 \times 0,00256/\pi)^{1/2} = 0,057 \text{ m} = 57 \text{ mm}$$

La vitesse de l'air à la sortie de la tuyère pour l'écoulement avec frottement sera :

$$w_{2f} = \varphi w_2 = 0,96 \times 746 = 716 \text{ m/s}$$

Par la suite, il est possible de calculer la température de l'air à la sortie :

$$T_3 = T_1 - [(\chi - 1)/\chi r]w_{cr}^2/2 = 573 - [(1,4 - 1)/1,4 \times 287,5] \times 716^2/2 = 318 \text{ K}$$

La section et le diamètre à la sortie de la buse sont :

$$A_2 = Qv_2/w_2 = QrT_3/w_{2f}\,p_2 = 4 \times 287,5 \times 318/716 \times 1 \times 10^5 = 0,0051 \text{ m}^2$$

$$d_2 = (4A_2/\pi)^{1/2} = (4 \times 0,0051/\pi)^{1/2} = 0,00866 \text{ m} = 86,6 \text{ mm}$$

d'où la longueur de la partie divergente de la tuyère au cas où il y a écoulement avec frottement :

$$L = (d_2 - d_{min})/2\text{tg}5° = (86,6 - 57)/2 \times 0,0875 = 135 \text{ mm}$$

$$\boldsymbol{L = 13,5 \text{ cm}}$$

Énoncé 4.3

Une tuyère de sablage est alimentée avec de l'air parfait provenant d'un réservoir dans lequel règnent les conditions $p_1 = 3$ bar et $T_1 = 67$ °C et où la vitesse peut être considérée comme nulle.

L'alimentation de ce dispositif est assurée à l'aide d'un compresseur ayant une capacité d'aspiration $Q_v = 120$ m^3/h aux conditions $p_a = 1$ bar et $T_a = 18$ °C.

La détente s'effectue jusqu'à la pression $p_2 = 1$ bar.

a) Définir le type de tuyère à utiliser.

b) Calculer les conditions critiques.

c) Calculer le diamètre du col de la tuyère.

Solution 4.3

a) L'air étant considéré comme parfait, $\chi = 1,40$.

L'état générateur de la détente est celui régnant dans le réservoir : $p_1 = 3$ bar et $T_1 = 60$ °C = 333 K.

Le rapport de détente de la tuyère est :

$$p_2/p_1 = 1/3 = 0,333$$

Cette valeur étant inférieure à celle du rapport de pression critique (pour l'air, 0,528), la tuyère doit donc être de forme convergente-divergente : il s'agit donc d'une tuyère de Laval.

b) Il est nécessaire d'établir la valeur des divers paramètres utiles au col de la tuyère (conditions critiques).

Masse volumique critique :

$$\rho_{cr} = \rho_1[2/(\chi + 1)]^{1/(\chi - 1)} = (p_1/rT_1)[2/(\chi + 1)]^{1/(1,4 - 1)}$$

$$\rho_{cr} = (3 \times 10^5/287,5 \times 333)[2/(1,4 + 1)]^{1/(\chi - 1)} = 1,99 \text{ kg/m}^3$$

Température critique :

$$T_{cr} = T_1[2/(\chi + 1)] = 333[2/(1{,}4 + 1)] = 277 \text{ K}$$

Vitesse critique (au col) :

$$w_{cr} \equiv c = [\chi r T_{cr}]^{1/2} = [1{,}4 \times 287{,}5 \times 277]^{1/2} = 334 \text{ m/s}$$

c) Le débit masse d'air s'établit en considérant le compresseur :

$$Q = Q_v \rho_a = (100/3\,600)1{,}209 = 3{,}36 \times 10^{-2} \text{ kg/s}$$

où la masse volumique de l'air ρ_a à l'aspiration résulte de :

$$v_a = rT_a/p_a = 287{,}5 \times 288/1 \times 10^5 = 0{,}827 \text{ m}^3\text{/kg}$$

soit $\rho_a = 1/v_a = 1/0{,}827 = 1{,}209$ kg/m^3
Compte tenu du débit masse par unité de surface :

$$(Q/A_0)_c = w_{cr}\rho_{cr} = 334 \times 1{,}99 = 665 \text{ kg/s.m}^2$$

on trouve pour la section du col de la tuyère :

$$A_{oc} = Q/w_{cr}\rho_{cr} = 3{,}36 \times 10^{-2}/665 = 50{,}6 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

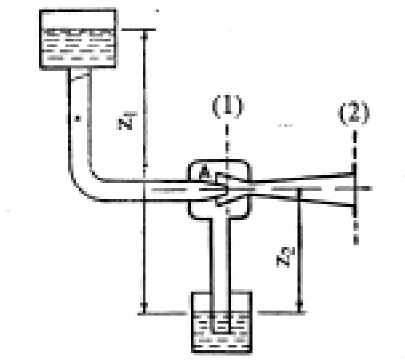
d'où le diamètre du col :

$$\boldsymbol{d_c = 8{,}02 \text{ mm}}$$

Énoncé 4.4

Calculer, en négligeant les pertes, le vide théorique que l'on peut obtenir au moyen d'un jet d'eau dans la chambre de mélange de l'éjecteur d'eau de la figure Ex.6.

Figure Ex.6 – Illustration pour l'énoncé 4.4.



À la sortie du diffuseur (pression atmosphérique, $p_2 = 1{,}013 \times 10^5$), la vitesse du jet est de 2,7 m/s. Le diamètre du jet $d_2 = 50$ mm dans la section 2 est deux fois plus grand que dans la section 1.

En sachant que le débit d’eau d’alimentation (T_1) est 9,6 m^3/h, la différence de niveau de liquide entre T_1 est T_2 est égale à 22 m, que le rendement se situe autour de 20 % et que le liquide à aspirer a une densité ρ = 1 050 kg/m^3, déterminer le débit du liquide à aspirer (de densité ρ = 1 050 kg/m^3) si la hauteur d’aspiration z_2 (égale à z_3) est de 4 m.

Solution 4.4

L’équation de Bernoulli, dans laquelle on néglige les pertes, écrite entre les sections 1 et 2, se présente sous la forme :

$$z_1 + (p_1/\rho g) + (w_1^2/2g) = z_2 + (p_2/\rho g) + (w_2^2/2g)$$

Étant donné la position horizontale de la pompe, $z_1 = z_2$ et, comme $d_2 = d_1$:

$$w_1 = (A_2/A_1)w_2 = (50/25)^2 \times 2{,}7 = 12{,}8 \text{ m/s}$$

l’équation de Bernoulli nous permet de déterminer la pression en (1) :

$$p_1 = p_2 + (w_2^2 - w_1^2)\rho/2 = 1{,}013 \times 10^5 + (2{,}7^2 - 12{,}8^2) \times 1\,050/2$$

$$p_1 = 101\,300 - 82\,188 = 19\,111 \text{ Pa}$$

Le vide théorique sera alors :

$$\text{Vide}_{\text{th}} = p_2 - p_1 = 101\,300 - 19\,111 = 82\,189 \text{ Pa}$$

$$\text{Vide}_{\text{th}} = (82\,189/101\,300) \times 760 = \mathbf{617\ mg}$$

Avec le rendement du dispositif η = 0,2, la puissance consommée par l’éjecteur est :

$$E_c = G_v \rho g(z_1 - z_2) = 9{,}6 \times 1\,050 \times 9{,}81(22 - 4)/3\,600 = 471 \text{ W}$$

Ce qui donne la puissance utile de l’éjecteur :

$$E_u = \eta E_c = 0{,}2 \times 471 = 94{,}2 \text{ W}$$

d’où l’on tire le débit que l’on peut aspirer :

$$G_v = E_u/\rho g z_2 = 94{,}2/(1\,050 \times 9{,}81 \times 4) = 2{,}28 \times 10^{-3} \text{ m}^3\text{/s}$$

$$\mathbf{G_v = 8{,}23\ m^3/h}$$

Énoncé 4.5

On souhaite réchauffer G_{v2} = 50 m^3/h d’eau de T_{w1} = 20 °C à T_{w2} = 60 °C au moyen d’un réchauffeur à jet de vapeur. La vapeur motrice arrive sous une pression de 3 bar.

Solution 4.5

Une lecture sur la table de vapeur permet de trouver la valeur de l'enthalpie spécifique pour la vapeur à 3 bar (4 bar absolus), h = 2 737,6 kJ/kg.

Chaleur spécifique de l'eau : c_{p2} = 4,2 kJ/kg

On obtient pour la consommation de vapeur :

$$G_1 = G_{v2}\rho c_{p2}\Delta T/(h - c_p T_{w2}) = 60 \times 1\,000[4{,}2(60 - 20)/(2\,736 - 4{,}2 \times 50)]$$

$$G_1 = 4\,055{,}4 \text{ kg/h}$$

où $\Delta T = T_{w2} - T_w$

Énoncé 4.6

La vapeur sortant d'un évaporateur à la température T_2 = 50 °C est aspirée par un éjecteur à vapeur alimenté avec de la vapeur du réseau sous pression p_1 = 8 bar. Le mélange, assimilé à des vapeurs d'eau, est refoulé dans le corps de chauffe à une température de saturation T = 70 °C.

Calculer la quantité de solution que l'on peut évaporer avec 1 kg de vapeur vive.

Solution 4.6

On lit sur le diagramme enthalpique (voir figure 4.13) ou dans les tables de vapeurs les valeurs de l'enthalpie :

- pour p_1 = 8 bar, h_{1A} = 662 kcal/kg
- pour p_2 = 0,126 bar, h_{2B} = 505 kcal/kg et h_{2C} = 618 kcal/kg
- pour p = 0,312 bar, h_D = 655 kcal/kg

Les valeurs des pressions p_2 et p correspondent respectivement aux températures 50 °C et 70 °C.

Les différences d'enthalpie représentant la détente de la vapeur vive sont :

$$\Delta h_1 = h_{1A} - h_{2B} = 662 - 505 = 157 \text{ kcal/h}$$

respectivement la compression de la vapeur aspirée est :

$$\Delta h_2 = h_D - h_{2C} = 655 - 618 = 37 \text{ kcal/h}$$

Le rapport $\Delta h_2/\Delta h_1$ = 37/157 = 0,235 permet de trouver sur le diagramme de Petzold, pour une pression p_2 = 0,126 bar, un rendement du diffuseur qui varie entre 0,69 et 0,74. Supposons η_{dif} = 0,7. Le diagramme de la figure 4.11 indique, pour cette valeur du rendement et pour un rapport d'enthalpies égal à 0,235, un rapport de débits G_1/G_2 = 1,15.

Il est donc nécessaire de disposer de 1,15 kg de vapeur vive pour aspirer 1 kg de vapeur d'évaporation. La quantité de vapeur de mélange $G_1 + G_2$ = 2,15 kg pourra évaporer 2,15/1,06 = 2 kg de solution.

Remarque

L'éjectocompression a d'autant plus d'intérêt que la pression de vapeur motrice est élevée et que la différence entre la pression de la vapeur d'évaporation et la pression de la vapeur de chauffage est faible.

Énoncé 4.7

On utilise une pompe à liquide à jet d'eau pour diluer de l'acide chlorhydrique HCl 30 % ayant une température de 20 °C.
La concentration de l'eau motrice est 0 % et la pression p_1 = 3,5 bar.
Débit d'acide aspiré : G_2 = 1 000 kg/h pour une pression d'aspiration p_2 = 1,0 bar
Pression de refoulement : p = 1,8 bar
a) Calculer le débit de mélange (pour le choix de la pompe).
b) Calculer la concentration de la solution diluée.

Solution 4.7

a) Le rapport de pression conduit à la valeur :

$$\phi = \Delta p/\Delta p_1 = (p - p_2)/(p_1 - p_2) = (1{,}8 - 1{,}0)/(3{,}5 - 1{,}0) = 0{,}32$$

Pour un rapport de densités ρ_2/ρ_1 = 1,15/1,0 = 1,15, d'après le diagramme de la figure 4.14, le rapport de pressions demande une consommation spécifique de liquide moteur C_{sp} = 1,8.
Il est possible de déterminer le débit du liquide moteur en écrivant :

$$G_1 = C_{sp}G_2 = 1{,}8 \times 1\,000 = 1\,800 \text{ kg/h}$$

Le débit de mélange est la somme de deux débits :

$$G = G_1 + G_2 = 1\,800 + 1\,000$$

$$\boldsymbol{G = 2\,800} \textbf{ kg/h}$$

Ainsi le choix de la taille de la pompe se fera en fonction de la valeur de G.
b) Pour calculer la concentration du mélange, on peut également écrire :

$$C_{sp} = (C_2 - C)/(C - C_1) = (0{,}3 - C)/(C - 0)$$

d'où, après regroupement, on obtient l'égalité :

$$2{,}8C = 0{,}3$$

$$\boldsymbol{C \cong 0{,}1}$$

La solution du mélange aura donc une concentration de 10 %.

Énoncé 4.8

On utilise une pompe à vide à jet de vapeur pour aspirer un débit G_2 = 100 kg/h de vapeur d'eau à 150 °C et p_2 = 6 mbar. Pression de la vapeur motrice/ p_1 = 3 bar. Le refoulement se fait dans un condenseur dont la température de l'eau de refroidissement est T_w = 20 °C.
a) Calculer la surconsommation de vapeur motrice si la température de l'eau de refroidissement augmente à T_w = 30 °C.

b) Calculer le nombre d'étages de la pompe à vide afin d'aspirer sous p_2 = 0,1 mbar et de refouler dans un condenseur à p = 56 mbar.

Solution 4.8

a) On adopte ΔT = 4 °C ; ainsi, pour une température de condensation T_c = 24 °C, la pression au condensateur est p = 30 mbar.
La consommation étant une fonction des rapports de pressions, il est nécessaire de connaître :

- le taux de détente $\beta = p_1/p_2 = 3 \times 10^3/6 = 500$
- le taux de compression $\pi = p/p_2 = 30/6 = 5$

Une lecture du diagramme de la figure 4.15 nous donne une consommation spécifique C_{sp} = 1,85. D'où la consommation de vapeur motrice :

$$G_1 = C_{sp}G_2 = 1{,}85 \times 100 = 185 \text{ kg/h}$$

Si la température de l'eau de refroidissement devient T_w = 30 °C, pour ΔT = 5 °C, on a une température de condensation T_c = 35 °C, donc une pression p = 56 mbar. On obtient cette fois $K = 56/6 \approx 9{,}3$. Une nouvelle lecture du diagramme donne C_{sp} = 3,5.
La surconsommation en vapeur motrice sera :

$$\varepsilon = (3{,}5 - 1{,}85) \times 100/1{,}85$$

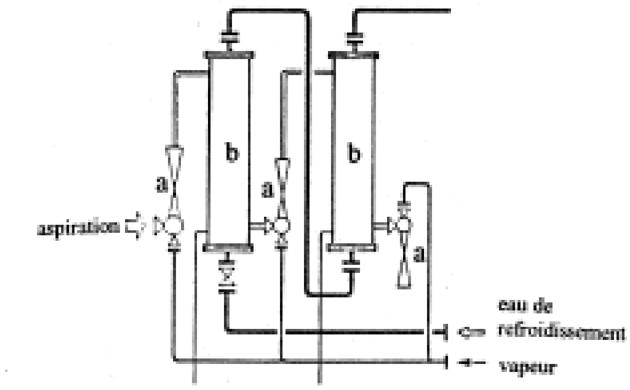
$$\boldsymbol{\varepsilon = 89\ \%}$$

b) Pour une pression d'aspiration p_2 = 0,1 mbar, le taux de compression sera :

$$\pi = 56/0{,}1 = 560$$

Pour atteindre des pressions basses, il est nécessaire d'installer plusieurs éjecteurs en série. Généralement, on doit avoir un taux de compression $\pi \leq 10$. Ainsi, il faut prévoir trois étages de compression (figure Ex.7) ayant chacun un taux π d'environ 8,25. La pression motrice étant identique pour tous les étages, le taux de compression admissible pour chaque étage est fonction de la pression d'aspiration.

Figure Ex.7 – Exemple de montage d'une pompe à vide à trois étages avec condenseurs par surface pour des pressions d'aspiration jusqu'à 5 mbar.
a : pompe à jet. b : condenseur.



Exemples d'application du chapitre 5
Transport pneumatique et hydraulique des solides

Énoncé 5.1

On cherche à déterminer la dimension la plus petite des particules qui se déposent dans une canalisation de gaz de forme carrée, de côté a = 1,0 m et de longueur L = 240 m.
Vitesse du gaz dans la canalisation : w_g = 6 m/s
Viscosité : $\mu = 0{,}03 \times 10^{-3}$
Densité du gaz : ρ_g = 0,8 kg/m^3
Densité des particules : ρ_p = 2 400 kg/m^3

Solution 5.1

Le temps nécessaire au gaz pour traverser la canalisation sera :

$$t = L/w = 240/6 = 40 \text{ s}$$

Dans cet intervalle de temps, vont se déposer uniquement les particules dont la vitesse réelle de sédimentation n'est pas plus petite que :

$$w_0 = a/t = 1/40 = 0{,}025 \text{ m/s}$$

On calcule le diamètre des particules de forme sphérique dont la vitesse théorique de sédimentation est deux fois plus grande, c'est-à-dire $w_{0,th}$ = 0,05 m/s.
Le critère de Lyascenko nous donne :

$$\text{Ly} = w_{0,th}{}^3\rho_f{}^2/\mu\rho_p g = (0{,}05)^3 \times 0{,}8^2/0{,}03 \times 10^{-3} \times 2\,400 \times 9{,}81$$

$$\mathbf{Ly = 1{,}13 \times 10^{-4}}$$

Sur le diagramme de la figure 5.1, on lit la valeur Re = 0,1 de laquelle on déduit :

$$d_p = \mathrm{Re}\mu_f / w_{0,th}\rho_f = 0{,}1 \times 0{,}03 \times 10^{-3}/0{,}05 \times 0{,}8 = 0{,}075 \times 10^{-3}\ \mathrm{m}$$

$$\boldsymbol{d_p = 75\ \mu m}$$

Énoncé 5.2

Calculer la dimension des plus grandes particules de carbonate de calcium, de forme sphérique, qui peuvent être entraînées par un courant d'eau s'écoulant à la vitesse $w = 0{,}6$ m/s. Température de l'eau : $T = 10$ °C
Viscosité de l'eau à 10 C : $\mu_l = 1{,}3 \times 10^{-3}$ Pa.s
Densité du carbonate de calcium : $\rho_p = 2\ 710$ kg/m^3

Solution 5.2

On calcule la valeur du critère de Lyascenko :

$$\mathrm{Ly} = w_0^{\,3}\rho_l^{\,2}/\mu(\rho_p - \rho_l)g = (0{,}6)^3 \times 1\ 000^2/1{,}3 \times 10^{-3} \times (2\ 710 - 1\ 000) \times 9{,}81$$

$$\mathrm{Ly} = 9{,}88 \times 10^3$$

À l'aide du diagramme de la figure 5.1, pour $\mathrm{Ly} = 9{,}88 \times 10^3$, on trouve :

$$\mathrm{Ar} = 2{,}0 \times 10^6$$

Respectivement :

$$\mathrm{Re} = 2{,}7 \times 10^3$$

D'où le diamètre maximal des particules entraînées par l'eau :

$$d_p = \mathrm{Re}\mu_l / w_0\rho_l = 2{,}7 \times 10^3 \times 1{,}3 \times 10^{-3}/0{,}6 \times 1\ 000 = 5{,}85 \times 10^{-3}\ \mathrm{m}$$

$$\boldsymbol{d_p = 5{,}85\ mm}$$

Énoncé 5.3

On transporte une suspension de cellulose, 4 % dans l'eau (fluide non newtonien du type loi en puissance), par un système de transport hydraulique à une vitesse $w_{mix} = 1{,}5$ m/s.
Densité de la suspension : $\rho = 990$ kg/m^3
Longueur de la canalisation : $L = 120$ m
Diamètre de la canalisation : $d = 150$ mm
Propriétés d'écoulement du fluide :

- $k' = 22{,}0$ indice de consistance
- $n = 0{,}575$ indice d'écoulement

a) Calculer la perte de charge Δp_c dans la canalisation en utilisant l'équation pour un écoulement laminaire. Vérifier avec le critère Re_G qu'il s'agit bien d'un écoulement laminaire.

b) Calculer la perte de charge Δp_c en utilisant la méthode du coefficient de frottement f_{NN}.

Solution 5.3

a) On obtient pour la perte de charge :

$$\Delta p_c = 4k'(L/d)[8w/d]^n = 4 \times 22(120/0{,}15)(8 \times 1{,}5/0{,}15)^{0{,}575}$$

$$\Delta p_c = 8{,}75 \times 10^5 \text{ N/m}^2 = \mathbf{8{,}75 \text{ bar}}$$

On vérifie le régime d'écoulement avec la relation 5.49 dans laquelle on a remplacé $k[(3n + 1)/4n]^n$ par k' :

$$\mathrm{Re}_G = d^n w^{2-n}\rho/8^{n-1}k' = [(0{,}15)^{0{,}575}(1{,}5)^{1{,}425} \times 990]/8^{-0{,}425} \times 22 = 65{,}2$$

qui montre que l'écoulement est bien laminaire.
b) On calcule le coefficient de frottement f_{NN} :

$$f_{NN} = 16/\mathrm{Re}_G = 16/65{,}2 = 0{,}245$$

d'où la perte de charge :

$$\Delta p_c = 4f_{NN}(L/d)(w^2/2)\rho = 4 \times 0{,}245(120/0{,}15)[(1{,}5)^2/2]990$$

$$\Delta p_c = 8{,}746 \times 10^5 \text{ N/m}^2$$

Énoncé 5.4

On fait transporter du charbon pulvérulent, de taille $d_p \sim 1$ mm et $\rho_s = 1\,600$ kg/m^3, dans une installation hydraulique dont la conduite est de longueur $L = 20$ km et de diamètre $d = 500$ mm.

Durée du transport : $t = 3$ h

La suspension est constituée de 50 % en poids de charbon et de 50 % eau ($\rho_f = 1\,000$ kg/m^3).

Calculer le nombre de stations de pompage, si la puissance effective $E_u = 125$ kW et le rendement des pompes $\eta = 0{,}7$.

La suspension est considérée comme un fluide non newtonien du type loi en puissance avec les caractéristiques $n = 0{,}2$ et $k = 0{,}6$.

Solution 5.4

L'équation de Bernoulli entre le point de chargement et le point de récupération du charbon s'écrit :

$$g\Delta z + \Delta w^2/2 + \Delta p/\rho_m + W + \Sigma F = 0$$

Puisque $p_1 = p_2 = p_{atm}$ et étant donné la longueur de la conduite, les pertes de charge par frottement sont dominantes, par rapport aux autres termes de l'équation ; ainsi l'équation devient :

$$W + \Sigma F = 4 f_{NN} w^2 L/d$$

On calcule la vitesse de la suspension :

$$w = L/t = 20\,000/3 \times 3\,600 = 1{,}85 \text{ m/s}$$

ce qui nous permet de déterminer le débit :

$$G = wA\rho_m = 1{,}85 \times (\pi \times 0{,}5^2/4) \times 1\,230 = 446{,}5 \text{ kg/s}$$

où la densité de la suspension résulte de l'expression :

$$\rho_m = 2\rho_f\rho_s/(\rho_f + \rho_s) = 2 \times 1\,000 \times 1\,600/(1\,000 + 1\,600) = 1\,230 \text{ kg/m}^3$$

On calcule le critère de Reynolds généralisé :

$$\mathrm{Re}_G = dnw^{2-n}\rho/8^{n-1}k[(3n + 1)/4n]^n$$

$$\mathrm{Re}_G = (0{,}5^{0,2} \times 1{,}85^{1,8} \times 1\,230/8^{-0,8} \times 0{,}6) \times [4 \times 0{,}2/(1 + 3 \times 0{,}2)] = 24\,850$$

Il s'agit donc d'un écoulement turbulent.
Le diagramme de la figure 5.9 donne, pour $n = 0{,}2$, $f_{NN} = 0{,}018$, d'où la perte de charge :

$$W = \Sigma F = 4 \times 0{,}018 \times (1{,}85)^2 \times 20 \times 10^3/0{,}5 = 985{,}68 \text{ J/kg}$$

La puissance totale dépensée pour le transport est :

$$E_a = WG/\eta = 985{,}68 \times 446{,}5/0{,}7 = 628{,}7 \text{ kW}$$

d'où le nombre de stations :

$$n = E_a/E_u = 628{,}7/125 = \mathbf{5\ stations}$$

Énoncé 5.5

On transporte du sable dans un convoyeur pneumatique long de 200 m à un débit $G = 1{,}0$ kg/s. Caractéristiques du sable :

- taille moyenne du grain $d_m = 1{,}25$ mm
- densité $\rho = 2\,600$ kg/m^3

Calculer le débit d'air nécessaire pour le transport, le diamètre de la conduite et la chute de pression entre les points de chargement et de déchargement.

Solution 5.5

Pour les installations conventionnelles de transport pneumatique à l'intérieur des conduites, on utilise en règle générale un rapport de $x = 5$ entre le débit masse du solide et le débit masse du gaz. Ainsi, le débit d'air sera :

$$G_a = G/x = 1{,}0/5 = 0{,}20 \text{ kg/s}$$

et, en considérant la densité de l'air $\rho_a = 1{,}3$ kg/m^3, on obtient :

$$Gv_a = G_a\rho_a = 0{,}20 \times 1{,}3 = \mathbf{0{,}26\ m^3/h}$$

Afin de limiter la perte de charge, la vitesse de l'air dans l'installation ne doit pas dépasser 30 m/s. En ignorant le volume occupé par le sable (environ 0,2 % de celui de l'air), on aboutit à une section de conduite :

$$A = Gv_a/w_a = 0{,}26/30 = 0{,}0087 \text{ m}^2$$

d'où le diamètre de la conduite :

$$d = (4A/\pi)^{1/2} = (4 \times 0{,}0087/\pi)^{1/2} = 0{,}105 \text{ m}$$

$$d = 105 \text{ mm}$$

Il faut choisir le diamètre légèrement supérieur disponible. Pour l'exercice, on prend une valeur très proche, soit **DN = 100 mm**.

Pour le sable dont la taille est d_m = 1,25 mm et la densité ρ = 2 600 kg/m^3, la vitesse de chute (à calculer ou à consulter dans les tables) est w_0 = 4,7 m/s.

Vitesse relative air-sable :

$$w_a - w = 4{,}7/[0{,}468 + 7{,}25(4{,}7/2\,600)^{1/2}] = 6{,}05 \text{ m/s}$$

Aire de la section de la conduite DN = 100 mm (d_i = 101,6 mm) :

$$A = \pi \times 0{,}1016^2/4 = 0{,}0081 \text{ m}^2$$

La vitesse de l'air :

$$w_a = 0{,}26/0{,}0081 = 32{,}1 \text{ m/s}$$

nous permet de calculer la vitesse du sable :

$$w = 32{,}1 - 6{,}05 = 26{,}05 \text{ m/s}$$

On calcule le nombre de Reynolds, pour lequel on a pris la densité de l'air 1,3 kg/m^3 et la viscosité 1,7 × 10^{-5} Ns/m^2 :

$$\text{Re} = wd\rho_a/\mu_a = 26{,}05 \times 0{,}102 \times 1{,}3/1{,}7 \times 10^{-5} = 2{,}03 \times 10^5$$

Le diagramme de Moody pour cette valeur nous donne un facteur de frottement λ = 0,004.

En introduisant λ dans l'équation de la perte de charge pour l'écoulement de l'air uniquement, on obtient :

$$\Delta p_a = 4\lambda(L/d)(\rho_a w_a^{\,2}/2) = 4 \times 0{,}004(200/0{,}102)(1{,}30 \times 32{,}1^2/2)$$

$$\Delta p_a = 21\,012 \text{ N/m}^2 = 21{,}01 \text{ kN/m}^2$$

En supposant l'écoulement incompressible et des conditions isothermiques :

$$(\Delta p_{susp}/\Delta p_a)(w^2/G) = 2\,805/w_0$$

$$\Delta p_{susp} = (2\,805\Delta p_a G)/(w_0 w^2) = (2\,805 \times 21{,}01 \times 1{,}0)/(4{,}7 \times 18{,}65^2)$$

$$\boldsymbol{\Delta p_{susp} = 18{,}5 \text{ kN/m}^2}$$

Énoncé 5.6

On utilise un cyclone pour la séparation des particules de solide transportées dans un courant d'air à T = 25 °C.

Diamètre minimal des particules : d = 80 µm

Débit du courant d'air : q_m = 2 000 kg/h

Coefficient de résistance du cyclone : ξ = 160

Calculer le diamètre du cyclone en sachant que la résistance hydraulique admise de l'appareil est $\Delta p/\rho_a$ = 740.

Solution 5.6

On calcule la vitesse radiale w dans la partie cylindrique du cyclone :

$$w_c^2 = 2(\Delta p/\rho_c)/\xi = 2 \times 740/160 = 9{,}25$$

$$w_c = 3{,}04 \text{ m/s}$$

La densité de l'air à 25 °C étant :

$$\rho_a = \rho_0 T_0/T = 1{,}29(273/298) = 1{,}18 \text{ kg/m}^3$$

le débit volumique d'air sera :

$$Q = q_m/\rho_a = 2\,500/1{,}18 = 2\,118{,}6 \text{ m}^3\text{/h}$$

$$Q = 2\,118{,}6/3\,600 = 0{,}558 \text{ m}^3\text{/s}$$

D'où le diamètre du cyclone :

$$D = (4Q/\pi w_c)1/2 = (4 \times 0{,}558/\pi \times 3{,}04)1/2 = 0{,}496 \text{ m}$$

$$\boldsymbol{D = 0{,}50 \text{ m}}$$

Exemples d'application du chapitre 6
Ventilateurs

Énoncé 6.1

Un débit masse d'air Q_m = 20 000 kg/h doit être assuré par un ventilateur dans une installation de séchage. La différence de pression entre les points de refoulement et d'aspiration est Δp_t = 400 N/m^2.

Puissance installée du moteur électrique : E = 2,50 kW

À des conditions normales, la densité de l'air a la valeur ρ_0 = 1,29 kg/m^3.

a) Calculer le rendement du moteur électrique :

- en été, quand la température de l'air est T_1 = 27 °C
- en hiver, quand la température de l'air descend à T_2 = –10 °C

b) Calculer les puissances du moteur, dans les mêmes conditions de température, si le ventilateur fonctionne à une altitude z = 2 000 m.

Solution 6.1

a) Étant donné que la densité de l'air varie avec la température selon l'expression $\rho = \rho_0 T/T_1$, on va déterminer cette densité.

- En été (T_1 = 273 + 27 = 300) :

$$\rho_1 = 1{,}29 \times 273/300 = 1{,}174 \text{ kg/m}^3$$

- d'où le débit volume :

$$Q_1 = Q_m/3\,600\rho_1 = 20\,000/3\,600 \times 1{,}174 = 4{,}73 \text{ m}^3\text{/s}$$

- En hiver (T_2 = 273 – 10 = 263) :

$$\rho_2 = 1{,}29 \times 273/263 = 1{,}339 \text{ kg/m}^3$$

- avec $Q_2 = Q_2/3\,600\rho_2 = 20\,000/3\,600 \times 1{,}339 = 4{,}15 \text{ m}^3\text{/s}$

On exprime le rendement du moteur :

- en été : $\eta_1 = Q_1 \Delta p_t/1\,000E = 4{,}73 \times 400/1\,000 \times 2{,}5$

$$\boldsymbol{\eta_1 = 0{,}757}$$

- en hiver : $\eta_2 = Q_2 \Delta p_t/1\,000E = 4{,}15 \times 400/1\,000 \times 2{,}5$

$$\boldsymbol{\eta_2 = 0{,}664}$$

À une altitude de 2 000 m, la densité de l'air à des conditions normales est $\rho_z = 1{,}007 \text{ kg/m}^3$.

En été, à T_1 = 27 °C, on aura :

- une densité d'air $\rho_{z1} = 1{,}007 \times 273/300 = 0{,}916 \text{ kg/m}^3$
- un débit volume d'air $Q_1 = 20\,000 \times 0{,}916/3\,600 = 5{,}09 \text{ m}^3\text{/s}$
- une puissance électrique consommée $E_1 = 5{,}09 \times 400/0{,}757 \times 1\,000$

$$\boldsymbol{E_1 = 2{,}69 \text{ kW}}$$

En hiver, à T_2 = –10 °C, on aura :

- une densité d'air $\rho_{z2} = 1{,}007 \times 273/263 = 1{,}045 \text{ kg/m}^3$
- un débit volume d'air $Q_2 = 20\,000 \times 1{,}045/3\,600 = 5{,}81 \text{ m}^3\text{/s}$
- une puissance électrique consommée $E_2 = 5{,}81 \times 400/0{,}664 \times 1\,000$

$$\boldsymbol{E_2 = 3{,}50 \text{ kW}}$$

Énoncé 6.2

Un ventilateur, destiné à des gaz de hauts-fourneaux, doit assurer un débit $Q = 100 \text{ m}^3\text{/s}$.

Les gaz, de masse spécifique $\rho = 1{,}20$ kg/m^3, sont aspirés à une pression $p_1 = 1\ 008$ N/m^2 et refoulés afin d'alimenter des fours sous une pression $p_2 = 2\ 000$ N/m^2.

Rendement du ventilateur : $\eta = 0{,}7$

Le tronçon de canalisation à l'aspiration présente une perte de charge totale $h_{f.asp} = 140$ mm CE ; après le ventilateur, la perte de charge est $h_{f.ref} = 120$ mm CE.

La vitesse moyenne du fluide gazeux à l'entrée du ventilateur est $w_{asp} = 20$ m/s, celle de la sortie est $w_{ref} = 25$ m/s.

a) Calculer la hauteur manométrique totale, exprimée en mm CE et en Pa.

b) Calculer la puissance effective (absorbée) à prévoir pour le choix du moteur d'entraînement.

Solution 6.2

a) La hauteur manométrique totale se calcule en additionnant les hauteurs d'aspiration et de refoulement, et en tenant compte des pertes de charge.

D'après l'équation de Bernoulli, dans laquelle on néglige la vitesse des gaz dans le haut-fourneau et le four, ainsi que la différence des cotes entre les différents points du parcours des gaz :

$$h_t = h_{ref} - h_{asp} = (w_{ref}^2/2g + p_{st,ref}/\rho g) - (w_{asp}^2/2g + p_{st,asp}/\rho g)$$

où $h_{ref} = p_2/\rho g + h_{f,ref} = (2\ 000/1{,}2 \times 9{,}81)(1{,}20/1\ 000) + 120$

$$h_{ref} = 203 + 120 = 323 \text{ mm CE}$$

et $h_{asp} = p_1/\rho g - h_{f,asp} = (1\ 008/1{,}2 \times 9{,}81)(1{,}20/1\ 000) - 140$

$$h_{asp} = 102 - 140 = -38 \text{ mm CE}$$

En faisant la différence :

$$h_t = 323 - (-38) = \mathbf{361\ mm\ CE}$$

ou, puisque 1 Pa = 0,1019 mm CE :

$$\boldsymbol{p_t = 3\ 543\ \mathrm{Pa}}$$

b) En utilisant les données précédentes, on trouve pour la puissance effective :

$$E = Qp_t/1\ 000\ \eta_{ef} = 100 \times 3\ 543/1\ 000 \times 0{,}7$$

$$\boldsymbol{E = 506{,}2\ \mathrm{kW}}$$

Énoncé 6.3

Sur le tronçon d'aspiration d'un ventilateur centrifuge existe un vide de 15,8 mm CE. Le manomètre monté sur la gaine de refoulement tout de suite après le ventilateur indique une surpression de 20,7 mm CE. Un anémomètre monté sur le tronçon de refoulement indique une vitesse du fluide gazeux $w = 21{,}0$ m/s. Les diamètres des conduites d'aspiration et de refoulement $d = 250$ mm sont identiques. La vitesse de rotation de l'appareil est N = 960 tr/min pour une consommation d'énergie E = 0,70 kW.

a) Calculer la pression développée par le ventilateur et le rendement.

b) Calculer de quelle manière varie le débit si le nombre de rotations augmente à 1 150 tr/min.

Solution 6.3

a) Étant donné que le diamètre des canalisations est le même, les pertes de pression dues à la pression dynamique sur la canalisation d'admission, respectivement de refoulement sont identiques ; la pression développée par le ventilateur sera :

$$p = p_2 - p_1 = [0{,}0207 \times 9{,}81 - (-0{,}0158 \times 9{,}81)] \times 1\,000$$

$$\boldsymbol{p = 354\ \mathrm{Pa}}$$

Le calcul du débit du ventilateur nous donne :

$$Q = (\pi d^2/4)w = (\pi \times 0{,}25^2/3\,600) \times 21{,}0 = 1{,}03\ \mathrm{m^3/s}$$

Dès lors, il est possible de déterminer la puissance théorique du ventilateur :

$$E_{\mathrm{th}} = (1{,}03 \times 354)/1\,000 = 0{,}368\ \mathrm{kW}$$

et ensuite le rendement effectif :

$$\eta_{\mathrm{ef}} = E_{\mathrm{th}}/E = 0{,}368/0{,}77$$

$$\boldsymbol{\eta_{\mathrm{ef}} = 0{,}53}$$

b) Si la vitesse de rotation passe à N' = 1 150 tr/min, les relations 6.9 à 6.11 permettent d'écrire pour le débit :

$$Q' = Q(N'/N)$$

$$Q' = 1{,}03(1\,150/960) = 1{,}24\ \mathrm{m^3/s}$$

et pour la puissance :

$$E' = E(N'/N)^3 = 0{,}70(1\,150/960)^3$$

$$\boldsymbol{E' = 1{,}20\ \mathrm{kW}}$$

Énoncé 6.4

À l'essai d'un ventilateur centrifuge, dont la vitesse de rotation est N = 1 500 tr/min, on obtient les valeurs suivantes :

Q (m³/h)	100	360	700	1 000	1 600	2 000

Δp (mm CE)	46,0	43,2	44,0	43,5	39,5	32,2

Le couplage du ventilateur à un réseau de ventilation montre que, en fonctionnant à la même vitesse de rotation, les pertes de pression dues à l'écoulement d'un débit volume d'air Q = 1 350 m^3/h dans le réseau sont :

- Δp_d = 8,7 mm CE, pression dynamique dépensée pour obtenir la vitesse de l'air à la sortie du réseau ;
- $\Delta p_f + \Delta p_s$ = 29,4 mm CE, perte de pression par frottement, respectivement due aux résistances locales ;
- $\Delta p_{st} = p_2 - p_1$ = 13,0 mm CE, pression statique.

Calculer le débit du ventilateur couplé au réseau.

Solution 6.4

On doit repérer le point d'intersection entre les deux caractéristiques respectives du ventilateur et du réseau.

La caractéristique du réseau se présente sous la forme d'une parabole dont l'équation est :

$$\Delta p = \mathrm{a}Q^2 + \mathrm{b}$$

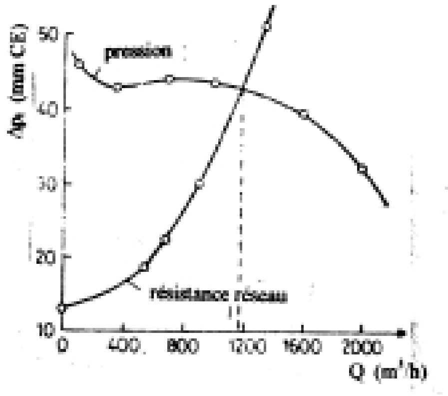
où le premier terme aQ^2 représente la somme des pertes de pression $\Delta p_d + \Delta p_f + \Delta p_s$ et dont la variation est proportionnelle au carré du débit ; a est une constante ; le second terme b correspond à la pression statique, donc à la différence entre les pressions de refoulement et d'aspiration.

Voici quelques points de cette parabole :

Q (m^3/h)	**aQ^2**	**b**	**Δp**
1 350	38,1	13,0	51,4
1 350/1,5 = 900	38,1/1,5^2 = 16,9	13,0	29,9
1 350/2 = 675	38,1/2,0^2 = 9,5	13,0	22,5
1 350/2,5 = 540	38,1/2,5^2 = 6,1	13,0	19,1
0	**0**	**13,0**	**13,0**

En traçant sur un graphique (Δp, en ordonnée et $-Q$, en abscisse) les caractéristiques respectives du ventilateur et du réseau conformément aux valeurs obtenues à l'essai et selon les points donnés dans le tableau précédent, il résulte que le point d'intersection donnant le débit du ventilateur correspond à Q = 1 175 m^3/h (figure Ex.8).

Figure Ex.8 – Illustration de l'exercice 6.4.



Exemples d'application du chapitre 7 Compresseurs

Énoncé 7.1

Un compresseur à deux étages aspire un débit volume d'air $Q = 400$ Nm^3/h à la température $T_1 = 18$ °C et à la pression $P_1 = 1$ bar.

Le refoulement se fait à la température $T_2 = 80$ °C et à la pression $P_2 = 6$ bar.

Entre les étages, l'air traverse un refroidisseur où sa température est ramenée à sa valeur initiale (à pression constante).

Le rapport entre la course et le diamètre du piston, au premier étage qui dispose de deux cylindres, est $L_1/D_1 = 1{,}1$. Le même rapport, au deuxième étage, a la valeur $L_2/D_2 = 1{,}2$.

Vitesse de rotation : $N = 550$ tr/min

Espace mort : $k = 0{,}05$

a) Calculer l'exposant polytropique de la compression.

b) Calculer les dimensions des cylindres.

c) Calculer la puissance utile nécessaire à la compression.

Solution 7.1

a) Le rapport optimal de compression pour un étage sera :

$$\pi = P_x/P_1 = P_2/P_x = (P_2/P_1)^{1/2} = (6/1)^{1/2} = 2{,}45$$

Ainsi la pression intermédiaire devient :

$$P_x = \pi P_1 = 2{,}45 \times 1 = 2{,}45 \text{ bar}$$

L'exposant polytropique s'obtient en utilisant la relation 7.8 :

$$T_2/T_1 = \pi^{(n-1)/n}$$

d'où on tire n sous la forme :

$$n = \ln\pi/\ln\pi(T_1/T_2) = \ln(2{,}45)/\ln(2{,}45) \times (291/353)$$

$$\boldsymbol{n = 1{,}27}$$

b) Le coefficient de remplissage s'obtient avec la relation 7.15 :

$$\eta_v = 1 - k[\pi^{(1/n)-1}] = 1 - 0{,}05[(2{,}45)^{1/1{,}27-1}] = 0{,}949$$

Le débit volumique d'air aspiré par le compresseur sera :

$$Q_1 = Q_0(T_1/T_2) = 400(291/273) = 426{,}4 \text{ m}^3\text{/h}$$

On en déduit le volume d'air aspiré par le cylindre du premier étage à une course du piston :

$$V_{a1} = Q_1/iN = 426{,}4/2 \times 550 \times 60 = 0{,}00646 \text{ m}^3$$

En tenant compte du coefficient de remplissage, le volume du cylindre devient :

$$V_{C1} = V_{a1}/\eta_v = 0{,}00646/0{,}949 = 0{,}0068 \text{ m}^3$$

Puisque $V_{C1} = (\pi D_1^2/4)L_1$ et $L_1 = 1{,}1D_1$, on peut exprimer le diamètre du cylindre sous la forme :

$$D_1 = (4V_{C1}/1{,}1\pi)^{1/3} = (4 \times 0{,}0068/1{,}1 \times \pi)^{1/3}$$

$$D_1 = 0{,}199 \text{ m}$$

Alors :

$$L_1 = 1{,}1D_1 = 1{,}1 \times 0{,}199 = 0{,}219 \text{ m}$$

d'où la longueur totale du cylindre :

$$L_{t1} = (1 + k)L_1 = (1 + 0{,}05) \times 0{,}219$$

$$\boldsymbol{L_{t1} = 0{,}23 \text{ m}}$$

Le volume d'air aspiré dans le cylindre du deuxième étage à une course du piston peut se déterminer avec la relation :

$$V_{a2} = (Q_1/N)(P_1/P_x) = (426{,}4/550 \times 60)(1/2{,}45) = 0{,}00527 \text{ m}^3$$

En suivant le même raisonnement qui nous a permis de calculer D_1 et L_{t1}, on aboutit à :

$$V_{C2} = V_{a2}/\eta_v = 0{,}00527/0{,}949 = 0{,}00556 \text{ m}^3$$

Il résulte pour le diamètre et la course du piston :

$$D_2 = (4 \times 0{,}00556/1{,}2\pi)^{1/3}$$

$$\boldsymbol{D_2 = 0{,}180 \text{ m}}$$

$$L_2 = 1{,}2D_2 = 1{,}2 \times 0{,}180 = 0{,}217 \text{ m}$$

d'où la longueur totale du cylindre du deuxième étage :

$$L_{t2} = (1 + k)L_2 = (1 + 0{,}05) \times 0{,}217$$

$$\mathbf{L_{t2} = 0{,}228\ m}$$

c) La puissance utile nécessaire à la compression se déduit à partir de la relation 7.8 dans laquelle on a remplacé V par Q :

$$E_u = (2n/n - 1)P_1Q_1[\pi^{(n-1)/n} - 1] = (2n/n - 1)P_1Q_1[(T_2/T_1) - 1]$$

$$E_u = (2 \times 1{,}27/1{,}27 - 1) \times 100 \times 10^3 \times (426{,}4/3\,600)[(353/291) - 1]$$

$$\mathbf{E_u = 23\,740\ W = 23{,}74\ kW}$$

Énoncé 7.2

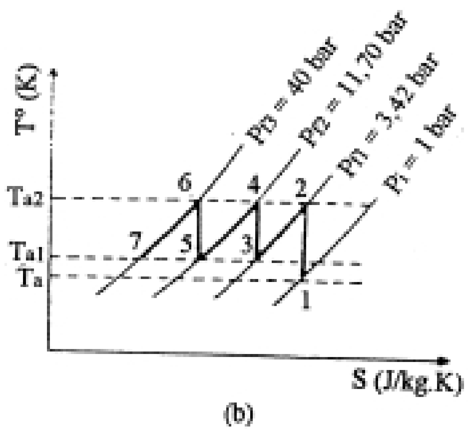
Un compresseur est utilisé pour assurer un débit d'air comprimé $Q_K = 200$ m^3/h à $P_2 = 40$ bar. L'air, aspiré à la pression $P_1 = 1$ bar, arrive dans le compresseur à la température $T = 20$ °C. La compression de l'air a lieu de manière adiabatique.

a) Calculer le nombre d'étages de compression et la répartition des pressions par étage.

b) Calculer la puissance mécanique demandée pour la compression, si celle-ci, considérée comme adiabatique, a un rendement $\eta_{gl} = 0{,}8$.

c) Calculer le débit d'eau de refroidissement dans les refroidisseurs, en considérant une élévation de la température de l'eau $\Delta T_w = 8$ °C.

Figure Ex.9 – Illustration pour l'énoncé 7.2 : (a) schéma de l'installation ;
(b) représentation des cycles dans le diagramme *T-S*.



Solution 7.2

a) En choisissant un rapport de compression $\pi = 4$, on peut écrire :

$$N = (\log P_{N+1} - \log P_1)/\log\pi = (\log 40 - \log 1)/\log 4$$

$$\boldsymbol{N = 2{,}66}$$

On adopte **3 étages**.
En négligeant les pertes de pression entre les étages, le degré de compression π par étage sera (figure Ex.9a) :

$$\pi\_ = 40/1 = 3{,}42$$

ce qui donne la répartition approximative par étage suivante :

	$\boldsymbol{P_i}$	$\boldsymbol{P_f}$
Étage 1	1,0	3,42
Étage 2	3,42	11,70
Étage 3	11,70	40,0

b) Le travail théorique nécessaire à la compression se calcule selon la relation :

$$W_{ad} = NRT_1(\chi/\chi - 1)[(P_i/P_f)^{(\chi - 1)/\chi)i} - 1]$$

Supposons que, dans le refroidisseur, l'air se refroidit jusqu'à 30 °C. En remplaçant les valeurs dans la formule, il résulte :

$$W_{ad} = 3 \times 287 \times 303 \times (1{,}4/0{,}4)[(40/1)^{(0{,}4/1{,}4) \times 3} - 1]$$

$$W_{ad} = 383\ 221 \text{ J/kg}$$

avec $T = 273 + 30 = 303$ K.
La puissance absorbée sur l'arbre du compresseur, en tenant compte du rendement global, se détermine à partir des relations 7.22 et 7.28 :

$$E_{ac} = Q_K W_{ad}/3\ 600\eta$$

avec $\rho = 1{,}29$ kg/m^3 la densité de l'air :

$$E_{ac} = 200 \times 1{,}29 \times 383\ 221/3\ 600 \times 0{,}8$$

$$\boldsymbol{E_{ac} = 34\ 330 \text{ W} = 34{,}33 \text{ kW}}$$

c) Pour trouver la consommation en eau dans les refroidisseurs, il faut calculer la température après les étages 2 et 3 de compression, en considérant qu'après les étages 1 et 2, l'air se refroidit à 30 °C (figure Ex.9b).

Remarque

Dans le cylindre du premier étage de compression, la température à la fin de la compression sera plus petite étant donné que l'air est aspiré à 20 °C et non à 30 °C.

En utilisant l'équation

$$T_2 = T_1(P_2/P_1)^{(\chi - 1)/\chi}$$

on obtient :

$$T_2 = 303(3{,}42)^{0{,}4/1{,}4}$$

$$T_2 = 430 \text{ K} = 157 \text{ °C}$$

On suppose que la chaleur spécifique de l'air aux trois étages de compression reste constante et égale à $c_{pa} = 1{,}01$ kJ/kg.K. Il résulte que l'eau de refroidissement doit évacuer une quantité de chaleur égale à :

$$Q = Q_K c_{pa}(T_2 - T_1)/3\,600$$

$$Q = 200 \times 1{,}29 \times 1{,}01 \times 10^3(157 - 303)$$

$$Q = 27{,}578 \text{ kW}$$

On peut également calculer Q avec :

$$Q = W_{ad}Q_K/3\,600 = 383\,221 \times 200 \times 1{,}29/3\,600 = 27{,}464 \text{ kW}$$

Puisque la température de l'eau de refroidissement subit une élévation de température $\Delta T_w = 8$ °C, la quantité d'eau nécessaire résulte de l'équation :

$$G = Q/c_{pw}\Delta T_w = 27{,}578/4{,}18 \times 8 = 0{,}825 \text{ kg/s}$$

$$G_v = 0{,}825 \times 3\,600/1\,000$$

$$\mathbf{G_v = 2{,}97\ m^3/h}$$

Énoncé 7.3

Dans une petite unité de production industrielle, un procédé de fabrication nécessite un débit d'air comprimé $q_m = 65$ kg/h, à une pression $P_2 = 4$ bar.
On dispose d'un compresseur à piston, à simple effet et ayant les caractéristiques suivantes :

- diamètre du cylindre $D = 150$ mm
- longueur de la course $L = 200$ mm
- nombre de tours $N = 250$ tr/min
- espace mort $k = 5$ %
- compression polytropique avec $n = 1{,}2$

a) Calculer le débit d'air comprimé obtenu avec ce compresseur. Au cas où il faut le coupler à une soufflante, quelle doit être la pression de l'air avant de pénétrer dans la conduite d'aspiration du compresseur ?
b) Calculer la pression limite de refoulement à laquelle le débit devient nul.

Solution 7.3

a) En considérant la pression de l'air à l'aspiration $P_1 = 1$ bar, la relation 7.15 nous permet de déterminer le rendement volumique théorique :

$$\eta_{v.th} = 1 - k[(P_2/P_1)^{1/n} - 1] = 1 - 0{,}05 \times [(4/1)^{1/1{,}2} - 1]$$

$$\eta_{v.th} = 0{,}891$$

En adoptant un coefficient volumétrique $\lambda_p = 0{,}9$, le rendement volumétrique devient :

$$\eta_v = 0{,}9\eta_{v.th} = 0{,}9 \times 0{,}891 = 0{,}802$$

Le débit volume du compresseur résulte de la relation :

$$Q = \eta_v ALN/60 = 0{,}802 \times 0{,}01766 \times 0{,}2 \times 250/60$$

avec $A = \pi D^2/4 = \pi \times (0{,}15)^2/4 = 0{,}01766\ \text{m}^2$ l'aire de la section du cylindre

$$Q = 0{,}0118\ \text{m}^3/\text{s} = 42{,}5\ \text{m}^3/\text{h}$$

Si l'on considère que l'air a été aspiré à la température ambiante, donc ayant une densité $\rho = 1{,}2\ \text{kg/m}^3$, on trouve pour le débit masse :

$$q_m = Q\rho = 42{,}5 \times 1{,}2 = \mathbf{51{,}0\ kg/h}$$

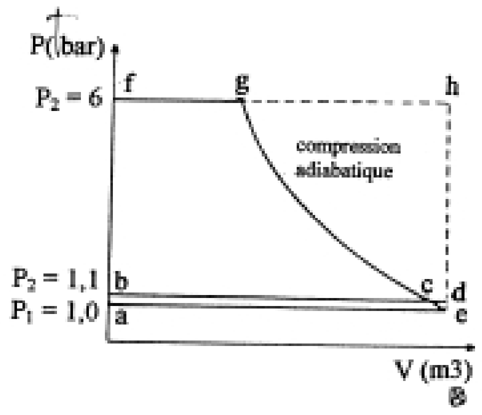
b) On constate que le compresseur ne peut pas satisfaire la demande en air comprimé à la pression de 4 bar. En conséquence, on va le coupler avec une soufflante.
La soufflante doit comprimer l'air de la pression initiale jusqu'à une pression :

$$\boldsymbol{P_x = 65/51 = 1{,}275\ \text{bar}}$$

Énoncé 7.4

Comparer le travail mécanique théorique nécessaire à la compression de 1 m^3 d'air de la pression $P_1 = 1$ bar :
a) à la pression $P_2 = 1{,}1$ bar
b) à la pression $P_2 = 6$ bar
On va déterminer la valeur du travail mécanique avec la formule thermodynamique pour une compression adiabatique, ainsi qu'avec la formule hydraulique en considérant l'air comme un gaz non compressible.

Figure Ex.10 – Illustration pour l'énoncé 7.4.



Solution 7.4

a) P_1 = 100 kPa et P_2 = 110 kPa.
À l'aide de la relation 7.7 relative au travail dépensé pour la compression de 1 m^3 d'air, aux conditions d'aspiration, on obtient :

$$W_{td} = (\chi/\chi - 1)P_1[(P_2/P_1)^{(\chi - 1)/\chi} - 1]$$

$$W_{td} = (1{,}4/0{,}4)100 \times 10^3[(1{,}1)^{0{,}4/1{,}4} - 1] = 9\,637{,}5 \text{ J/m}^3$$

La formule hydraulique nous permet d'écrire pour la même compression :

$$W_{hd} = V\Delta P = 1 \times (110 - 100) \times 10^3 = 10\,000 \text{ J/m}^3$$

dans laquelle $P = P_2 - P_1$.
b) La formule thermodynamique aboutit à :

$$W_{td} = (1{,}4/0{,}4) \times 100 \times 10^3[(6{,}0)^{0{,}4/1{,}4} - 1] = 233\,230 \text{ J/m}^3$$

Le même travail calculé avec la formule hydraulique est :

$$W_{hd} = 1 \times (600 - 100) \times 10^3 = 500\,000 \text{ J/m}^3$$

En comparant les deux variantes, on remarque que, dans le premier cas (compression jusqu'à P_2 = 1,1 bar), la différence entre les deux résultats est :

$$\varepsilon = (10\,000 - 9\,637{,}5) \times 100/10\,000 = 3{,}6\ \%$$

Ce cas correspond à l'étage limite de compression de l'air avec les ventilateurs, pour lesquels le calcul de la puissance d'entraînement se fait d'après la formule hydraulique.

Dans le deuxième cas (P_2/P_1 = 6), relatif à la compression de l'air avec le compresseur, la différence entre les deux formules dépasse 100 %. Il est évident que, pour le calcul de la puissance, on doit toujours utiliser la formule thermodynamique.

Sur le diagramme théorique indiquant le travail d'un compresseur à piston (figure Ex.10), on voit que la surface *abcd* (compression à P_2 = 1,1 bar) est approximativement égale à *abde* tandis que la surface *afge* (compression à P_2 = 6 bar) diffère beaucoup de la surface *afhe*.

Énoncé 7.5

Comparer la température de l'air, le travail mécanique théorique nécessaire et le rendement volumique à la fin d'une compression de type adiabatique de P_1 = 1 bar à P_2 = 7 bar, si l'opération est effectuée :

a) avec un compresseur à piston mono-étagé ;

b) avec un compresseur à deux étages et refroidissement intermédiaire ramenant l'air à sa température d'aspiration T = 18 °C.

L'espace mort k représente 5 % du volume V.

Solution 7.5

a) La température de l'air à la fin de la compression est déterminée avec la relation 7.7 :

$$T_2 = T\,[(P_2/P_1)^{(\chi-1)/\chi}]$$

$$T_2 = 291 \times [(7/1)^{(1,4-1)/1,4}] = 291 \times 1,744$$

$$T_2 = 507,5 \text{ K} = \mathbf{234,5\ °C}$$

$T_1 = 273 + T = 273 + 18 = 291$ K et $\chi = 1,4$.

On obtient le travail mécanique spécifique nécessaire à la compression aussi à partir de la relation 7.7 :

$$W^*_{ad} = (\chi/\chi-1)rT_1[(P_2/P_1)^{(\chi-1)/\chi} - 1] = (1,4/0,4) \times 287 \times 291 \times (1,744 - 1)$$

$$\boldsymbol{W^*_{ad} = 217\,478\ \mathbf{J/kg}}$$

et pour l'air 8 310/29 = 287 J/kg

Le rendement volumétrique résulte de la relation 7.15 :

$$\eta_v = 1 - k[(P_2/P_1)^{(1/\chi)} - 1] = 1 - 0,05[(7/1)^{1/1,4} - 1]$$

$$\boldsymbol{\eta_v = 0,85}$$

b) Le degré de compression dans chaque étage s'obtient avec $\pi = (7/1)^{1/2} = 2,645$.

La température après chaque étage de compression sera :

$$T_2 = T_1(P_2/P_1)^{(\chi-1)/\chi} = 291 \times (2,645)^{0,4/1,4} = 291 \times 1,32$$

$$T_2 = 384 \text{ K et } \boldsymbol{T = 111\ °C}$$

On en déduit le travail théorique total dépensé dans les deux étages :

$$W^*_{ad} = 2 \times 287 \times 291(1,4/0,4) \times [(7/1)^{0,4/2\times1,4} - 1]$$

$$\boldsymbol{W^*_{ad} = 192\,924\ \mathbf{J/kg}}$$

Le rendement volumique, pour la compression à deux étages, est :

$$\eta_v = 1 - 0{,}052[(2{,}645)^{1/1{,}4} - 1]$$

$$\boldsymbol{\eta_v = 0{,}95}$$

Comparaison des deux compresseurs :

Nombre d'étages	**1**	**2**
Température à la fin de la compression	234,5 °C	111 °C
Travail mécanique théorique dépensé	217 478 J/kg	192 924 J/kg
Rendement volumique	0,85	0,95

Cette comparaison montre la supériorité d'une compression à deux étages et ceci d'autant plus que le rapport de compression est plus grand.

Énoncé 7.6

On aspire du méthane à partir d'un réservoir sous pression P_1 = 2 bar, à travers une canalisation de longueur L = 300 m et de diamètre d = 150 mm. Au bout de la canalisation, un compresseur accroît la pression du gaz jusqu'à P_2 = 8 bar.

L'écoulement est considéré isothermique, à la température du méthane T_1 = 293 °C.

Masse moléculaire du méthane : M = 16 kg/kg.mol

Viscosité du méthane : $\mu = 1{,}10 \times 10^{-5}$ Pa.s (à T_m = 293 °C)

La canalisation dont la surface est propre a un coefficient de frottement λ = 0,02.

Calculer le débit-masse et la puissance du compresseur si le rendement global η_{gl} = 0,65.

Solution 7.6

La densité du méthane à la pression moyenne $P_m = (P_1 + P_2)/2$ = 5 bar est :

$$\rho_m = (16/22{,}4)(273/293)(500 \times 10^3/101{,}3 \times 10^3) = 3{,}285 \text{ kg/m}^3$$

L'aire de la section de la conduite est :

$$A = \pi d^2/4 = \pi \times 0{,}15^2/4 = 1{,}76 \times 10^{-2} \text{ m}^2$$

On calcule le débit avec la relation 2.31, pour un gaz idéal en écoulement isotherme permanent :

$$[(q_m/A)\_\ln(P_2/P_1)] - (P_2 - P_1)/v_m + \lambda(L/2d)(q_m/A)\_ = 0$$

qui devient, après remplacement des valeurs numériques et en tenant compte de $1/v_m = \rho_m$:

$$[(q_m/A)^2\ln(8/2)] - (8 - 2) \times 10^5 \times 3{,}285 + 0{,}02 \times (300/0{,}15)(q_m/A)^2 = 0$$

$$(q_\mathrm{m}/A)^2 = 9{,}21 \times 104$$

$$q_\mathrm{m} = 3{,}03 \times 10^2 \times 1{,}76 \times 10^{-2}$$

$$\boldsymbol{q_\mathrm{m} = 5{,}34\ \mathrm{kg/s}}$$

On obtient la puissance effective (accouplement sur arbre) :

$$E_\mathrm{ac} = q_\mathrm{m}P_\mathrm{m}v_\mathrm{m}\ln(P_2/P_1)/\eta = 5{,}34 \times 5 \times 10^5(1/3{,}285)\ln(8/2)/0{,}65$$

$$E_\mathrm{ac} = 17{,}33 \times 10^5\ \mathrm{W} = \mathbf{1\ 733\ kW}$$

Exemples d'application du chapitre 8 Installations de vide

Énoncé 8.1

Afin de limiter la perte de charge à 10 % maximum, calculer la vitesse d'écoulement admissible dans une conduite sous vide de diamètre d = 100 mm et de longueur L = 10 m. Le fluide transporté est de la vapeur d'eau à une température de 5 °C et une pression totale de 20 mbar.

Solution 8.1

On utilise l'abaque de la figure 8.2 qui donne la vitesse d'écoulement de l'air. On y observe que, pour une canalisation de diamètre 100 mm et de longueur 10 m, la vitesse admissible pour l'air à 20 °C est w_a = 58 m/s.

Pour la vapeur d'eau, il faut multiplier cette valeur par le facteur de correction, calculé avec la relation 8.25 :

$$f = (T/Mp_\mathrm{t})^{1/2} = (278/18 \times 20)^{1/2} \approx 0{,}88$$

d'où :

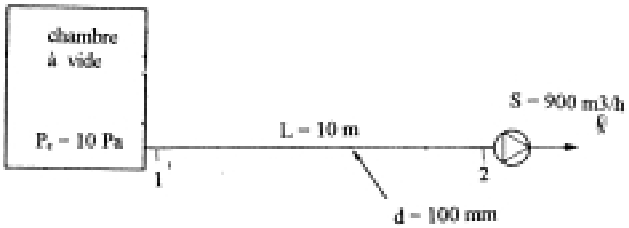
$$w_\mathrm{s} = fw_\mathrm{a} = 0{,}88 \times 58 = 0{,}87 \times 58$$

$$\boldsymbol{w_\mathrm{s} \approx 51\ \mathrm{m/s}}$$

Énoncé 8.2

On doit faire la mise sous vide d'une enceinte p_c = 10 Pa (air à 20 °C) avec une pompe dont la vitesse de pompage est S = 900 m^3/h. La canalisation reliant la pompe à l'enceinte a un diamètre de 100 mm et une longueur de 8 m (figure Ex.11).

Figure Ex.11 – Illustration pour l'énoncé 8.2.



a) Calculer la vitesse de pompage effective.

b) Calculer la pression à la bride d'aspiration de la pompe.

c) Localiser le point de l'installation où la résistance à l'évacuation de l'air est maximale.

Solution 8.2

Avant de procéder au calcul, il est nécessaire d'établir le régime d'écoulement. En faisant le produit $pd = 10 \times 0{,}1 = 1{,}0$ Pa.m, on voit qu'il s'agit d'un régime laminaire.

a) On suppose la pression moyenne dans la conduite $p_m = 10$ Pa. Après avoir déterminé la pression à la bride d'aspiration, on refait le calcul pour disposer d'une valeur de p_m plus précise.

La conductance équivalente est obtenue avec la relation 8.26 :

$$1/C_{eq} = (1/C_{or.lam}) + (1/C_{line.lam}) = (1/18d) + (1/1\,364 d^4 p_m/L)$$

$$1/C_{eq} = (1/18 \times 0{,}1) + [1/1\,364 \times (0{,}1)^4 \times 10/10] = 0{,}555 + 7{,}331 = 7{,}886$$

d'où la vitesse de pompage effective :

$$1/S_{ef} = (1/C_{eq}) + (1/S_2) = (7{,}886) + (1/0{,}25) = 11{,}886$$

$$S_{ef} = 0{,}084 \text{ m}^3/\text{s}$$

Comme le flux gazeux est conservatif :

$$Q_p = p_c S_{ef} = p_2 S_2$$

ce qui donne, pour la pression à la bride d'aspiration de la pompe :

$$p_2 = p_c S_{ef}/S_2 = 10 \times 0{,}084/0{,}25$$

$$\boldsymbol{p_2 = 3{,}4 \text{ Pa}}$$

b) Cette valeur de la pression nous permet de calculer une valeur plus exacte pour la pression moyenne :

$$p_m = (p_c + p_2)/2 = (10 + 3{,}4)/2 = 6{,}7 \text{ Pa}$$

On trouve pour la conductance équivalente :

$$1/C_{eq} = (1/18 \times 0{,}1) + [1/1\,364 \times (0{,}1)^4 \times 6{,}7/10] = 0{,}555 + 10{,}94 = 11{,}5$$

et finalement :

$$1/S_{ef} = (1/C_{eq}) + (1/S_2) = (11,5) + (1/0,25) = 15,5$$

$$\boldsymbol{S_{ef} = 0,064\ m^3/s}$$

c) D'après la relation 8.26, la conductance totale C_{tot} correspond à la vitesse de pompage effective :

$$1/C_{tot} = 1/C_{or} + 1/C_{line} + 1/S_2 = 0,555 + 10,94 + 4 = 15,5$$

d'où l'on tire pour les résistances au pompage :

- entrée orifice : $(0,555/15,5) \times 100 = 3,6\ \%$
- conduite : $(10,94/15,5) \times 100 = 70,6\ \%$
- pompe : $(4/15,5) \times 100 = 25,8\ \%$

On remarque que la majeure partie de cette résistance est représentée par la conduite. Afin d'augmenter la vitesse d'évacuation du gaz, on doit soit diminuer la longueur de la conduite, soit augmenter le diamètre. Cette dernière solution est la meilleure car la vitesse de pompage varie avec d^3.

Énoncé 8.3

En disposant d'une pompe à vide d'une capacité nominale $S = 100$ m^3/h (28 l/s), on doit faire passer la pression de $p_1 = 970$ mbar à $p_2 = 1$ mbar dans une installation de volume $V = 2\ 000$ l remplie d'air, à travers une conduite comprenant $L = 10$ m de tuyau de diamètre $d_1 = 25$ mm et 3 robinets de diamètre $d_2 = 20$ mm et de longueur $L_{rob} = 30$ mm.

a) Calculer le temps nécessaire pour atteindre le vide exigé.

b) Calculer la diminution du temps d'évacuation de l'air si les diamètres passent de 25 à $d_1 = 50$ mm et de 20 à $d_2 = 40$ mm.

Solution 8.3

a) En appliquant la relation 8.15 avec $p_m = 1$ mbar $= 10^2$ Pa, le calcul de la conductance aboutit à :

- pour la conduite :

$$C_1 = 1\ 364 d^4(pm/L) = 1\ 364 \times (0,025)^4 \times 10^2/10 = 5,33 \times 10^{-3}\ m^3/s = 5,33\ l/s$$

- pour les robinets :

$$C_2 = 1\ 364 d^4 p_m/L_s = 1\ 364 \times (0,02)^4 \times 10^2/(18 \times 0,02 + 0,03)$$

$$C_2 = 55,96 \times 10^{-3}\ m^3/s = 55,96\ l/s$$

- où $L_s = L_{eq} + L_{rob}$; la longueur de tuyauterie équivalente s'ajoute à sa longueur réelle. Pour un régime laminaire, le rétrécissement peut s'exprimer par environ $18d_2$.

On obtient pour l'admittance équivalente :

$$1/C_{eq} = (1/C_1) + (3/C_2) = (1/5{,}33) + (3/55{,}96) = 0{,}241$$

Le calcul du débit réel, en tenant compte que le débit nominal de la pompe est $S = 28$ l/s, nous donne la valeur :

$$1/S_{ef} = (1/C_{eq}) + (1/S) = (0{,}241) + (1/28) = 0{,}277$$

soit un débit réel :

$$S_{ef} = 3{,}61 \text{ l/s}$$

La relation 8.28 permet de déterminer le temps de vidange de l'installation :

$$t = (V/S_{ef})2{,}303\log(p_1/p_2) = (2\,000/3{,}61) \times 2{,}303 \times \log(970/1)$$

$$\boldsymbol{t = 3\,810 \text{ s} = 63{,}5 \text{ min}}$$

Remarque

Si le temps est considéré trop long, il serait inutile de prendre une pompe plus puissante et le problème ne peut être résolu qu'en augmentant le diamètre des conduites.

b) Avec les nouveaux diamètres, les valeurs de l'admittance deviennent :

- pour la conduite :

$$C_1 = 1\,364 d^4 p_m/L = 1\,364 \times (0{,}05)^4 \times 10^2/10 = 85{,}25 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$$

$$C_1 = 85{,}25 \text{ l/s}$$

- pour les robinets :

$$C_2 = 1\,364 d^4 p_m/L_s = 1\,364 \times (0{,}04)^4 \times 10^2/(18 \times 0{,}04 + 0{,}03) = 465{,}58 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$$

$$C_2 = 465{,}58 \text{ l/s}$$

On obtient pour l'admittance équivalente :

$$1/C_{eq} = (1/C_1) + (3/C_2) = (1/85{,}25) + (3/465{,}58) = 0{,}018$$

On calcule le débit réel, en tenant compte que le débit nominal de la pompe :

$$1/S_{ef} = (1/C_{eq}) + (1/S) = (0{,}018) + (1/28) = 0{,}0474$$

$$S_{ef} = 21{,}1 \text{ l/s}$$

D'où le nouveau temps de vidange :

$$t = (2000/21{,}1)2{,}303\log(970/1) = 652 \text{ s}$$

$$\boldsymbol{t \approx 11 \text{ min}}$$

Énoncé 8.4

On doit maintenir un récipient sous un vide $p_c = 10^{-5}$ torr. Pour ce faire, on couple une pompe à diffusion (de vitesse S_1) à une pompe primaire à piston tournant dont la vitesse est S_2. Le tube C_1 reliant le récipient à la pompe à diffusion est long de $L_1 = 10$ cm pour un diamètre $d_1 = 8$ cm. La conduite entre les deux pompes a une longueur $L_2 = 100$ cm et un diamètre $d_2 = 1{,}5$ cm. On estime le débit de fuites $q_F = 10^{-3}$ torr.litres/s et la pression à la bride d'aspiration de la pompe primaire $p_2' = 10^{-2}$ torr.

Calculer les vitesses de pompage S_1 et S_2 des deux pompes ainsi que la vitesse effective de la pompe primaire.

Solution 8.4

On suppose qu'une fois l'équilibre atteint dans le système, le débit de fuites correspond au flux gazeux aspiré par la pompe à diffusion. Dès lors le flux aspiré par la pompe à diffusion est le même que celui absorbé par la pompe primaire. On peut écrire :

$$Q_p = q_F = S_{1ef}\, p_c = S_1 p_1 = S_{2ef}\, p_2' = S_2\, p_2$$

Selon l'équation 8.27 appliquée à la relation du flux, on obtient les vitesses de pompage :

$$S_1 = q_F C_1/(C_1 p_c - q_F)$$

$$S_2 = q_F C_2/(C_2 p_2' - q_F)$$

On calcule les conductances :

$$C_1 = 12{,}1 d_1^3/(L_1 + 4d_1/3) = 12{,}1 \times 6^3/(10 + 4 \times 6/3) = 145 \text{ l/s}$$

$$C_2 = 12{,}1 d_2^3/(L_2 + 4d_2/3) = 12{,}1 \times 1{,}5^3/(100 + 4 \times 1{,}5/3) = 0{,}40 \text{ l/s}$$

Il résulte pour les deux vitesses :

$$S_1 = 10^{-3} \times 145/(145 \times 10^{-5} - 10^{-3}) = \mathbf{322\ l/s}$$

$$S_2 = 10^{-3} \times 0{,}40/(0{,}40 \times 10^{-2} - 10^{-3}) = 0{,}133 \text{ l/s} = \mathbf{8{,}0\ l/min}$$

Soit la vitesse de pompage effective de la pompe primaire :

$$S_{2ef} = 10^{-3}/10^{-2} = 0{,}1 \text{ l/s} = \mathbf{6\ l/min}$$

Énoncé 8.5

Calculer la pression limite que l'on peut atteindre dans un tube en utilisant une pompe dont la vitesse effective de pompage est $S_{ef} = 300$ l/s.

Les dimensions du tube sont : diamètre intérieur $d_i = 20$ cm et longueur $L = 100$ cm.

On considère que le flux qui pénètre dans le tube provient uniquement du dégazage sous vide de l'enveloppe métallique. Le débit de dégazage spécifique (après 4 heures) est $K_d = 10^{-7}$ torr.litres/s.cm^2.

Solution 8.5

Puisque la seule source qui vient alimenter le tube est la désorption et en supposant que la variations de S_{ef} en fonction de la pression est nulle ($V\mathrm{d}p/\mathrm{d}t = 0$), la relation devient :

$$Sp = q_d = K_d A_m$$

Pour un tube cylindrique :

$$A_m = \pi d_i L = \pi \times 20 \times 100 = 6\ 280\ \mathrm{cm}^2$$

Le débit de dégazage de cette surface sera :

$$q_d = K_d A_m = 10^{-7} \times 6\ 280 = 628 \times 10^{-6}\ \text{torr.litres/s}$$

La pression limite dans le tube est :

$$p_{lim} = q_d/S_{ef} = 628 \times 10^{-6}/300$$

$$\boldsymbol{p_{lim} = 2{,}1 \times 10^{-6}\ \textbf{torr}}$$

Énoncé 8.6

Il est demandé de maintenir sous un vide de pression $p = 50$ mbar, une installation dont le volume est d'environ 15 m^3. La longueur de l'étanchéité est estimée à $L_{et} = 10$ m, avec des fuites q_{et} de 200 g/h par mètre de joint. Le débit d'aspiration de définition (air à 20 °C) se situe autour de $Q_v = 18$ kg/h.

Une vérification de l'augmentation de pression dans l'installation est effectuée par deux mesures, avec et sans introduction de gaz.

La première mesure, après $t_1 = 120$ s, révèle une différence de pression $\Delta p_1 = 10$ mbar.

La mesure avec introduction de gaz $Q_{p2} = 4$ kg/h donne, toujours après $t_2 = 120$ s, une augmentation de pression $\Delta p_1 = 10$ mbar.

Calculer le débit massique nécessaire à la pompe à installer.

Solution 8.6

Ce débit massique se répartit entre les gaz et les vapeurs libérés par les produits à évacuer et le flux qui pénètre dans l'installation :

$$Q_p = Q_V + Q_F$$

Le flux Q_F qui pénètre dans l'enceinte de l'installation a comme origine l'étanchéité et le dégazage des matériaux sous vide.

Pour un volume de 15 m^3, suivant l'état de la surface, le dégazage des matériaux est compris entre 4 et 7 kg/h. On prend $q_d = 5$ kg/h.

Air de fuite : $q_F = q_{et}L_{et} = 0{,}2 \times 10 = 2{,}0$ kg/h

Supposons que le flux entant dans l'installation Q_F se situe entre 2 et 5 kg/h.

On choisit en première approximation $Q_F = 4$ kg/h. Ainsi le débit massique d'aspiration devient :

$$Q_p = 18,0 + 4,0 = 22,0 \text{ kg/h}$$

$$Q_p = 23,09(T/M) = 233 \times 22,0 = 5\ 126 \text{ mbar.l/s}$$

D'où la vitesse de pompage de la pompe :

$$S = Q_p/p = 5\ 126/50 = 102,5 \text{ l/s} = 369 \text{ m}^3\text{/h}$$

Le contrôle de la pression après les deux mesures permet de déterminer un flux de pénétration dans l'appareil :

$$Q_F = (Q_{p2}t_2/\Delta p_2)\{1/[(t_1/\Delta p_1) - (t_2/\Delta p_2)]\}$$

$$Q_F = (932 \times 120/30) \times \{1/[(120/10) - (120/30)]\}$$

$$Q_F = 466 \text{ mbar.l/s}$$

La vitesse de pompage réelle sera :

$$S = Q_p/p = (4\ 194 + 466)/50 = 93,2 \text{ l/s}$$

$$\boldsymbol{S = 335,5 \text{ m}^3\text{/h}}$$

Énoncé 8.7

On souhaite réaliser dans un récipient un vide de 0,9 bar (pression $p_1 = 0,1$ bar). On considère que la compression de l'air dans la pompe à vide est polytropique, avec l'exposant $n = 1,25$. Refoulement à la pression atmosphérique : $p_2 = 1$ bar

a) Calculer le travail mécanique théorique de compression consommé au moment où le vide dans le récipient atteint la valeur 0,1 bar, c'est-à-dire que la pression dans l'enceinte est $p_1 = 0,9$ bar.

b) Calculer le travail mécanique théorique de compression consommé au moment où le vide devient 0,3 bar ($p_1 = 0,7$ bar).

c) Calculer le travail mécanique théorique de compression consommé au moment où l'on obtient le vide nécessaire de 0,9 bar.

Solution 8.7

La relation 7.8 donne le travail de compression polytropique spécifique (1 m^3) de la pompe :

a) $p_2/p_1 = 1 \times 10^5/0,9 \times 10^5 = 1,11$

$$n/(n - 1) = 1,25/0,25 = 5$$

$$(n - 1)/n = 0,25/1,25 = 0,2$$

d'où en remplaçant :

$$W_t = p_1[n/(n - 1)][(p_2/p_1)^{(n-1)/n} - 1]$$

$$W_t = 0,9 \times 10^5 \times 5[1,11^{0,2} - 1]$$

$$\boldsymbol{W_t = 9\ 490\ \mathrm{J/m^3}}$$

b) $p_2/p_1 = 1 \times 10^5/0{,}3 \times 10^5 = 3{,}33$

$$W_t = 0{,}3 \times 10^5 \times 5[3{,}33^{0,2} - 1]$$

$$\boldsymbol{W_t = 40\ 839\ \mathrm{J/m^3}}$$

c) $p_2/p_1 = 1 \times 10^5/0{,}1 \times 10^5 = 10{,}0$

$$W_t = 0{,}1 \times 10^5 \times 5[10^{0,2} - 1]$$

$$\boldsymbol{W_t = 29\ 245\ \mathrm{J/m^3}}$$

On observe que le travail mécanique passe par un maximum et c'est pour cette valeur que l'on choisit la puissance du moteur électrique de la pompe à vide.

Exemples d'application du chapitre 9 Distribution et circulation des fluides

Énoncé 9.1

Afin d'assurer un débit G = 2 880 kg/h de vapeur d'eau saturée, il faut installer un robinet de réglage sur une conduite pour une détente adiabatique de p_1 = 20 bar à p_2 = 12 bar.

On considère qu'il n'y a pas de vaporisation (cavitation) dans le robinet.

Exposant adiabatique pour une vapeur saturée : $\chi = 1{,}135$

a) Calculer le K_v de la vanne.

b) Calculer le débit de vapeur si par le même robinet on fait passer de la vapeur surchauffée à p_1 = 24 bar et T = 300 °C.

Solution 9.1

a) L'expression du débit-masse pour l'écoulement d'un fluide compressible à travers un orifice se présente sous la forme :

$$G = \psi A p_1 (2/rT)^{1/2}$$

où ψ est le facteur de débit qui est déterminé avec la relation :

$$\psi = \{(\chi/\chi - 1)[(p_2/p_1)^{(2/\chi)} - (p_2/p_1)^{(\chi + 1/\chi)}]\}^{1/2}$$

En portant les valeurs numériques et en tenant compte que le rapport $p_2/p_1 = 12/20 = 0{,}6$, il vient :

$$\psi = \{(1{,}135/0{,}135)[(0{,}6)^{(2/1,135)} - (0{,}6)^{(2,135/1,135)}]\}^{1/2} = 0{,}45$$

La constante massique r se déduit en appliquant l'équation d'état :

$$r = p_1 v_1/T_1 = 20 \times 10^5 \times 0{,}09954/485 = 410\ \mathrm{J/kg.K}$$

avec $v_1 = 0{,}09954$ m^3/kg le volume massique de vapeur à 20 bar et $T_1 = T_{sat} + 273 = 212 + 273 = 485$ K

Ainsi on obtient la surface de l'orifice :

$$A = G(rT/2)^{1/2}/\psi p_1 = [0{,}8(410 \times 485/2)^{1/2}]/0{,}45 \times 20 \times 10^5$$

$$A = 2{,}80 \times 10^{-4}\ \text{m}^2$$

En appliquant la relation 9.6, on trouve :

$$K_v = 5{,}04 \times 10^4 \times A = 5{,}04 \times 10^4 \times 2{,}80 \times 10^{-4}$$

$$\boldsymbol{K_v = 14{,}1\ \text{m}^3/\text{h}}$$

b) Pour la vapeur surchauffée, l'exposant adiabatique est χ =1,30.

Le rapport des pressions étant p_1/p_2 = 12/24 = 0,5, la fonction de débit aura la valeur :

$$\psi = \{(1{,}30/0{,}130)[(0{,}5)^{(2/1{,}30)} - (0{,}5)^{2{,}30/1{,}30}]\}^{1/2} = 0{,}47$$

avec :

$v_1 = 0{,}09888$ m^3/kg le volume massique de vapeur à 24 bar et 300 °C

$T_1 = T_{sat} + 273 = 300 + 273 = 573$ K

$r = 24 \times 10^5 \times 0{,}09888/573 = 415$ J/kg.K la constante massique

On peut donc calculer le débit de vapeur :

$$G = \psi A p_1(2/rT_1)^{1/2} = 0{,}47 \times 2{,}80 \times 10^4 \times 24 \times 10^5(2/415 \times 573)^{1/2}$$

$$\boldsymbol{G = 0{,}916\ \text{kg/s} = 3\ 297\ \text{kg/h}}$$

Énoncé 9.2

On transporte de l'air comprimé à une température moyenne de 30 °C avec une conduite en acier de longueur L = 2 000 m et de diamètre d = 0,4 m. Le débit d'air G = 7 000 kg/h doit arriver à la sortie de la conduite à la pression p_2 = 1,8 bar.

On considère que les pertes de pression dans la conduite sont dues uniquement au frottement et on adopte un coefficient de frottement λ = 0,025.

Densité de l'air à des conditions normales : ρ_a = 1,29 kg/m^3

Calculer la pression initiale nécessaire au transport de l'air.

Solution 9.2

Dans le cas de conduites longues transportant du gaz, le calcul des pertes de pression par frottement se fait par l'intégration de la forme différentielle de la formule de Fanning-Darcy :

$$-\mathrm{d}p = (\lambda/d)(\rho w^2/2)\mathrm{d}L \qquad (1)$$

dans laquelle la densité ρ et la vitesse w sont fonctions de la pression du gaz, qui diminue le long de la conduite, et le produit ρw qui représente la vitesse massique du courant d'air reste constant.
En exprimant ρ et w par les caractéristiques de l'air à des conditions normales :

$$\rho = \rho_0(pT_0/\mathrm{p}_0T)$$

respectivement :

$$w = w_0(p_0T/pT_0)$$

et en les portant dans l'équation de la chute de pression (1), on obtient :

$$-\mathrm{d}p = (\lambda/2d)(\rho pT_0/p_0T)[(w_0p_0T/pT_0)^2]\mathrm{d}L \qquad (2)$$

En considérant l'écoulement isotherme sur toute la conduite, on regroupe tous les paramètres constants (y compris λ) en un terme noté k :

$$k = \lambda\rho_0 w_0^{\,2}p_0T/2dT_0$$

Ainsi, l'équation différentielle (2) s'écrit sous la forme :

$$-p\mathrm{d}p = k\mathrm{d}L$$

En intégrant cette équation entre les limites p_1 (pression initiale) et p_2 (pression finale) :

$$-\int p\mathrm{d}p = k\int \mathrm{d}L$$

on obtient :

$$(p_1^{\,2} - p_2^{\,2})/2 = kL$$

$$(p_1^{\,2} - p_2^{\,2}) = 2kL \qquad (3)$$

Dans les conditions de l'énoncé, la vitesse de l'air, à 0 °C et 1 bar, est :

$$w_0 = 4 \times 7\,000/1{,}29 \times 3\,600 \times \pi \times 0{,}4\_ = 12{,}0 \text{ m/s}$$

Il s'ensuit :

$$k = 0{,}025 \times 1{,}29 \times 12^2 \times 100\,000 \times 303/2 \times 0{,}4 \times 273 = 644{,}3 \times 10^3$$

En introduisant les valeurs numériques dans l'équation (3), on aboutit à :

$$p_1^{\,2} - (180 \times 10^3)^2 = 2 \times 644{,}3 \times 10^3 \times 2\,000$$

ce qui donne pour la pression initiale :

$$p_1 = 187 \times 10^3 \text{ N/m}^2$$

$$\boldsymbol{p_1 = 1{,}87 \text{ bar}}$$

Énoncé 9.3

Une conduite en acier de diamètre d = 40 mm et d'épaisseur δ = 2 mm véhicule un débit d'eau $G_v = 2{,}0 \times 10^{-3}$ m^3/s.

On suppose une fermeture instantanée de la vanne côté sortie se trouvant à une distance L = 650 m.

a) Calculer la contrainte d'étirement à la suite de l'augmentation de pression dans la tuyauterie.

b) Calculer la phase du coup de bélier.

Solution 9.3

a) La vitesse de propagation de l'onde de choc est donnée par la formule de Joukowski et, pour la tuyauterie rigide en acier transportant de l'eau, se présente sous la forme :

$$c = 1\,425/[1 + 0{,}01(d/\delta)]^{1/2}$$

$$c = 1\,425/[1 + 0{,}01(40/2)]^{1/2} = 1\,301 \text{ m/s}$$

Soit l'augmentation de la pression lors de la fermeture instantanée des vannes :

$$\Delta p = \rho c w$$

avec $w = G_v/A_0 = 4 \times 2{,}0 \times 10^3/\pi(0{,}04^2/4) = 1{,}6$ m/s

En exprimant cette variation de pression en mètres colonne de liquide :

$$h = \Delta p/\rho g = cw/g = 1\,301 \times 1{,}6/9{,}81 = 212 \text{ m}$$

ce qui correspond à 2 080 kN/m^2, soit environ 21 bar.

La contrainte d'étirement à la suite de la variation de pression sera :

$$\sigma = \Delta p d/2\delta = 2\,080 \times 10^3 \times 40/2 \times 2 = 0{,}21 \times 10^8 \text{ N/m}^2$$

Cet accroissement de tension, ajouté à la valeur de construction $\sigma = 1{,}1 \times 10^8$ N/m^2, approche de la valeur limite d'élasticité de l'acier.

À cet effet il faut monter sur la tuyauterie des soupapes de sûreté qui s'ouvrent automatiquement lorsque la pression devient supérieure à la valeur normale.

b) La phase du coup de bélier s'obtient d'après la relation 9.47 :

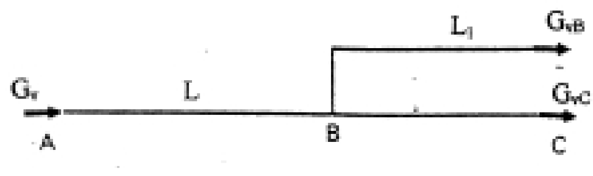
$$t = 2L/c = 2 \times 650/1\,301 = 1{,}0 \text{ s}$$

La fermeture de la vanne doit se faire dans un intervalle de temps dépassant 1 seconde. En réalité elle doit être supérieure à plusieurs secondes.

Énoncé 9.4

Un oléoduc long de L = 12 km délivre 720 m^3/j. La chute de pression est estimée à Δp = 40 bar. Afin d'augmenter la capacité de l'installation, on ajoute en ramification en parallèle (figure Ex.12) au système, sur L_1 = 8 km, une deuxième ligne de transport du même diamètre. On considère que la chute de pression reste la même et que l'écoulement est laminaire.

Figure Ex.12 – Illustration de l'énoncé 9.4.



Calculer l'augmentation de débit obtenue avec le terminal à deux conduites.

Solution 9.4

Puisque la deuxième tuyauterie a le même diamètre, on peut écrire $G_v = G_{vB} + G_{vC}$ et comme $G_{vB} = G_{vC}$ il s'ensuit :

$$G_{vB} = G_{vC} = G_v/2$$

Par ailleurs $\Delta p_B/\rho = \Delta p_C/\rho$ et donc :

$$\Delta p = \Delta p_A + \Delta p_B = \Delta p_A + \Delta p_C \qquad (1)$$

En supposant l'écoulement laminaire, on utilise pour le calcul de la perte de charge la relation 2.48 :

$$\Delta p = (32\rho w^2/\mathrm{Re})(L/d) = 32\mu Lw/d^2$$

qui devient, en remplaçant w par G_v/A :

$$\Delta p = 32\mu LG_v/d^2A = kLG\mathrm{v} \qquad (2)$$

où k est une constante exprimée en N.s/m^6.

Comme on ne dispose pas de données concernant les propriétés physiques, il est possible d'évaluer k en fonction du tronçon initial, en remplaçant les valeurs numériques dans l'équation de la chute de pression (2) :

$$40 \times 10^5 = k \times 12 \times 10^3 \times (720/24 \times 3\,600)$$

ce qui donne :

$$k = 4 \times 10^4 \text{ N.s/m}^6$$

En introduisant cette valeur de k en (1), on obtient :

$$40 \times 10^5 = 4 \times 10^4 \times (12 - 8) \times 10^3 \times G_v^* + 4 \times 10^4 \times 8 \times 10^3 \times G_v^*/2$$

d'où :

$$G_v^* = 4/30 = 0{,}0125 \text{ m}^3/\text{s} = 45 \text{ m}^3/\text{h}$$

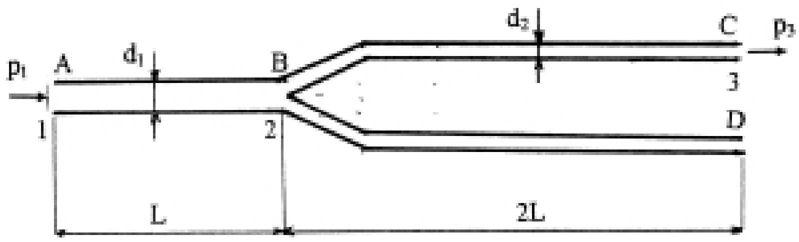
$$G_v^* = 1\,080 \text{ m}^3/\text{j}$$

Il résulte une augmentation de **360 m^3/j**, ce qui représente 50 % de la capacité initiale.

Énoncé 9.5

On effectue un écoulement laminaire à travers un réseau de conduites (figure Ex.13). Les données p_1, p_3, μ, L, d_1 et ρ sont connues, tout comme la relation entre les deux diamètres $d_1 = \sqrt{2}d_2$.

Figure Ex.13 – Illustration pour l'énoncé 9.5.



En sachant que la perte de charge dans le point de ramification est négligeable, calculer la vitesse moyenne w_m dans le réseau.

Solution 9.5

Les deux branches BC et BD étant semblables et puisque la somme de leurs débits est égale au débit passant en AB, on déduit que la vitesse moyenne est la même en AB comme dans les deux branches :

$$w_1 = w_2 = w_1$$

Ainsi, il est possible d'écrire :

$$w_1(\pi d_1^2/4) = 2w_2(\pi d_2^2/4) = 2w_2(\pi d_1^2/8)$$

En appliquant l'équation de Bernoulli entre les points 1 et 3, on obtient :

$$\rho w_1^2/2 + p_1 = \rho w_3^2/2 + p_3 + \Delta p$$

Or, les vitesses étant identiques, il résulte que la chute de pression $\Delta p = p_1 - p_3 \mu w L$.

Cette même chute de pression peut s'écrire sous la forme :

$$\Delta p = (\rho/2)(w^2L/d_1)\lambda_{1\text{-}2} + (\rho/2)(w^2 2L/d_2)\lambda_{2\text{-}3}$$

En régime laminaire, le coefficient de frottement est donné par l'expression :

$$\lambda = 64/\mathrm{Re} = 64\mu/\rho w d$$

d'où $\lambda_{1\text{-}2} = 64/(\rho w d_1/\mu)$ et $\lambda_{2\text{-}3} = 64/(\rho w d_2/\mu)$.

En portant les valeurs de $\lambda_{1\text{-}2}$ et $\lambda_{2\text{-}3}$ dans l'expression de Δp, on aboutit à :

$$\Delta p = (\rho/2)w^2L[(1/d_1)(64\mu/\rho w d_1) + (2/d_2)(64\mu/\rho w d_2)]$$

$$\Delta p = 32\mu wL[(1/d_1^2) + (2/d_2^2)]$$

et puisque $d_2^2 = d_1^2/2$:

$$\Delta p = 160\mu wL/d_1^2$$

ce qui permet de trouver pour la vitesse moyenne :

$$\boldsymbol{w = \Delta p d_1^2/160\mu L}$$

Énoncé 9.6

Avec une conduite de longueur L = 800 m, on transporte un débit d'hydrogène G = 250 kg/h entre l'unité de production et le point d'utilisation.

Coefficient de frottement à l'écoulement : λ = 0,03

Densité de l'hydrogène : ρ = 0,0825 kg/m^3

En admettent une perte de pression Δp = 1 000 Pa, calculer le diamètre de la conduite.

Solution 9.6

Dans le cas du transport de fluide à travers des conduites longues, la pression fournie au gaz est essentiellement nécessaire à vaincre le frottement, on peut ainsi considérer que la perte de pression admissible est égale à la perte de pression par frottement :

$$\Delta p = \Delta p_f = \lambda(L/d)(\rho w^2/2) \qquad (1)$$

Étant donné que la vitesse du gaz est inconnue, on l'exprime en fonction du débit volumique et du diamètre $w = 4G_v/\pi d^2$. La relation (1) devient après le remplacement de w :

$$\Delta p = \lambda(L/d)(8\rho G_v^2/\pi^2 d^4)$$

d'où :

$$d = C(L\rho G_v^2/\Delta p)^{1/5} \qquad (2)$$

expression dans laquelle $C = (8\lambda/\pi^2)^{1/5} = (8 \times 0{,}03/\pi^2)^{1/5} = 0{,}48$

Le débit volumique d'hydrogène étant $G_v = 250/0{,}0825 \times 3\,600 = 0{,}841$ m^3/s, on obtient le diamètre avec la relation (2) :

$$d = 0{,}48(800 \times 0{,}0825 \times 0{,}841^2/1\,000)^{1/5} = 0{,}48 \times 0{,}5417$$

$$\boldsymbol{d = 0{,}26 \text{ m}}$$

Énoncé 9.7

De la vapeur saturée s'écoule dans une conduite horizontale en acier de longueur L = 50 m et de diamètre d_i/d_e = 200/219 mm. La conduite, se trouvant à l'air libre

avec $T_{amb} = -5$ °C, est entourée par une couche d'isolation, dont la conductivité thermique varie selon la relation $\lambda_{is} = 0{,}0075 + 0{,}0002T_m$.
Température de la vapeur : $T_s = 225$ °C
Coefficient de convection isolation air : $\alpha_2 = 28$ W/m^2.C
a) Calculer l'épaisseur de la couche d'isolation δ_{is}, si la perte admissible de chaleur de la conduite ne doit pas dépasser $Q_p = 12{,}5$ kW.
b) Quelle aurait été cette perte de chaleur si la conduite n'était pas isolée ?

Solution 9.7

a) Le flux thermique linéaire dissipé dans l'air ambiant :

$$q_l = Q_p/L = 12\ 500/50 = 250{,}0 \text{ W/m}$$

On calcule l'écart de température entre la vapeur et l'air ambiant :

$$\Delta T = T_s - T_{amb} = 225 - (-5) = 230 \text{ °C}$$

La résistance thermique totale de la conduite isolée s'écrit :

$$R_t = R_1 + R_p + R_{is} + R_2$$

relation dans laquelle on peut négliger les valeurs de R_1 (vapeur-paroi) et R_p (paroi).
En procédant par essais successifs avec $\delta_{is} = 100$ mm et $T_m = 110$ °C, on trouve :

$$R_2 = 1/\pi d_{is}\alpha_2 = 1/\pi \times 0{,}419 \times 28$$

$$R_2 = 0{,}027 \text{ m.C/W}$$

où $d_{is} = d_e + 2\delta_{is} = 0{,}219 + 2 \times 0{,}100 = 0{,}419$ m
et $\lambda_{is} = 0{,}075 + 0{,}0002 \times 110 = 0{,}097$ W/m^2.C
On en déduit l'épaisseur de la couche d'isolation :

$$\ln(d_{is}/d_e) = 2\pi\lambda_{is}[(T_s - T_{amb})/q_l - R_2] = 2\pi \times 0{,}097[(225 + 5)/250 - 0{,}027]$$

$$\ln(d_{is}/d_e) = 0{,}544$$

d'où :

$$d_{is}/d_e = 1{,}723$$

or, comme $\delta_{is} = (d_{is} - d_e)/2 = (d_e/2)[(d_{is}/d_e) - 1] = (0{,}219/2)[1{,}723 - 1]$, on aboutit à :

$$\delta_{is} = 0{,}08 \text{ m} = 80 \text{ mm}$$

On refait le calcul pour $\delta_{is} = 80$ mm :

$$R_{is} = 1/\pi d_{is}\alpha_2 = 1/\pi \times 0{,}379 \times 28 = 0{,}03 \text{ m.C/W}$$

$$d_{is} = d_e + 2\delta_{is} = 0{,}219 + 2 \times 0{,}08 = 0{,}379 \text{ m}$$

$$\ln(d_{is}/d_e) = 2\pi \times 0{,}097[(225 + 5)/250 - 0{,}03] = 0{,}542$$

$$d_{is}/d_e = 1{,}72$$

$$\delta_{is} = (0{,}219/2)[1{,}72 - 1]$$

$$\boldsymbol{\delta_{is} = 0{,}079\ \mathrm{m}}$$

qui est une valeur assez précise de celle choisie dans le calcul.
Ensuite on vérifie la température moyenne T_m de cette couche d'isolation :

$$T_m = (T_s + T_{pe})/2 = (225 + 2{,}5)/2 = 113\ °\mathrm{C}$$

où T_{pe}, la température de la paroi extérieure, s'exprime par :

$$T_{pe} = T_{amb} + q_l R_2 = -5 + 250/(0{,}219 + 2 \times 0{,}079)$$

$$T_{pe} = -5 + 7{,}5 = 2{,}5\ °\mathrm{C}$$

Cette valeur de T_m est acceptable, étant très proche de celle choisie T_m = 110 °C.
b) La puissance thermique dissipée sans isolation thermique se calcule, cette fois, pour α_2 = 10 W/m^2.C. La résistance thermique totale sera :

$$R_t = (1/\pi \times 0{,}200 \times 8\,000) + [(1/2 \times \pi \times 40)\ln(0{,}219/0{,}200)] + 1/\pi \times 0{,}219 \times 10$$

$$R_t = 0{,}1477\ \mathrm{m.C/W}$$

d'où :

$$Q_p = q_l L = \Delta T L/R_t = (225 + 5)50/0{,}1477$$

$$\boldsymbol{Q_p = 77{,}86\ \mathrm{kW}}$$

La perte de puissance thermique sera dans ces conditions 6,23 fois plus grande.

Exemples d'application du chapitre 10
Stockage des fluides

Énoncé 10.1

Un dispositif de mesure par ultrasons, monté sur un réservoir cylindrique horizontal, est utilisé pour calculer le volume de liquide se trouvant dans le réservoir sous pression atmosphérique (air sec ρ = 1,205 kg/m^3). À vide, la durée de propagation de l'onde sonore est t_0 = 20 ms, cette durée est de 12 ms en présence d'un certain niveau de liquide dans le réservoir. Coefficient adiabatique pour l'air à 20 °C : χ = 1,407

Calculer le volume de liquide en sachant que le réservoir a une longueur L = 6 m et un diamètre D = 3,2 m.

Solution 10.1

En considérant L et L_0 les distances entre le capteur et les surfaces réfléchissantes, le niveau de liquide dans le réservoir se détermine par la différence $\Delta z = L_0 - L$. Ainsi, on peut écrire :

$$\Delta z = c(t_0 - t)/2 = 341{,}7(0{,}020 - 0{,}012)/2 = 1{,}36 \text{ m}$$

dans laquelle c, la célérité du son, est obtenue en utilisant la formule de Laplace :

$$c = [\chi p/\rho]^{1/2}$$

$$c = [1{,}407 \times 10^5/1{,}205]^{1/2} = 341{,}7 \text{ m/s}$$

La connaissance de Δz permet de calculer la valeur de l'angle α :

$$\cos\alpha = 1 - (\Delta z/R) = 1 - (1{,}36/1{,}6) = 0{,}15$$

$$\alpha = 81{,}3°$$

On peut donc calculer le volume de liquide avec la relation 10.25 :

$$V_c = LR^2[(\alpha/57{,}3) - \cos\alpha\sin\alpha]$$

$$V_c = 6 \times 1{,}6^2[(81{,}3/57{,}3) - (0{,}988 \times 0{,}148)]$$

$$\mathbf{V_c = 19{,}55\ m^3}$$

Énoncé 10.2

Pour les besoins d'une opération de production de l'industrie chimique, un réservoir cylindrique vertical à deux fonds bombés contient $m = 100$ kg d'ammoniac à $T = 50$ °C. Pour des raisons de sécurité, le réservoir est protégé contre les surpressions par une soupape de sûreté fonctionnant à p_i + 10 %.

Caractéristiques de l'appareil :

- volume $V = 16$ m^3
- virole cylindrique circulaire de diamètre intérieur $D = 1{,}6$ m
- fond en plein cintre exécuté en tôle chaudière pour laquelle $\sigma_{ad} = 370$ MM/m^2

Données pour l'ammoniac :

- $r = 488$ J/kgK
- $c_p = 2{,}06$ kJ/kg.K
- $\chi = 1{,}4$

Calculer l'épaisseur de la virole cylindrique et des fonds en plein cintre.

Solution 10.2

La pression de l'ammoniac dans le réservoir à $T = 50$ °C est :

$$p_i = mrT/V = 100 \times 488 \times 323/16 = 9{,}85 \times 10^5 \text{ N/m}^2$$

On obtient alors la pression de fonctionnement de la soupape de sûreté :

$$p_s = 1{,}1p_i = 1{,}1 \times 9{,}85 \times 10^5 = 10{,}84 \times 10^5 \text{ N/m}^2$$

Le calcul des épaisseurs de parois (virole + fonds) doit être basé sur cette valeur maximale.

En adoptant pour ce type de réservoir $C_s = 4$, $J = 0{,}75$ et $e_s = 1$ mm, on trouve avec la relation 10.7 l'épaisseur de la virole :

$$\delta_v = (p_s D/2\sigma_{ad})(C_s/J) + e_s$$

$$\delta_v = (10{,}84 \times 10^5 \times 1\,600/2 \times 370 \times 10^6)(4/0{,}75) + 1$$

$$\boldsymbol{\delta_v = 13{,}5 \text{ mm}}$$

On choisit $\delta_v = 14$ mm.

La relation 10.10 permet d'obtenir l'épaisseur du fond :

$$\delta_f = 1{,}1(p_s R/2\sigma_{ad})(C_s/J\psi) + e_s$$

$$\delta_f = 1{,}1 \times (10{,}84 \times 10^5 \times 800/2 \times 370 \times 10^6)(4/0{,}75 \times 0{,}9) + 1$$

$$\boldsymbol{\delta_f = 8{,}64 \text{ mm}}$$

Dans cette formule, $\psi = 0{,}9$ est un coefficient d'affaiblissement pour ouvertures et tuyauterie. On adopte 10 mm.

Énoncé 10.3

Soit un réservoir cylindrique, de diamètre $D = 3{,}2$ m, dans lequel le niveau d'eau se trouve à la hauteur $\Delta z = 5$ m au-dessus de la tubulure de vidange. Cette tubulure, qui se trouve à la base du réservoir, a une longueur $L = 30$ m et un diamètre intérieur $d = 150$ mm et débouche à la pression atmosphérique.

Valeur du coefficient de frottement dans la conduite : $\lambda = 0{,}018$

Calculer le temps nécessaire pour vider le réservoir de la moitié de son volume.

Solution 10.3

En appliquant l'équation de Bernoulli pour un écoulement turbulent, on peut écrire :

$$g(z_2 - z_1) + (w_2^2 - w_1^2)/2 + (p_2 - p_1)/\rho + F = 0$$

Puisque $p_1 = p_2$ et en considérant la vitesse dans le réservoir w_1 comme négligeable, la relation devient :

$$w_2^2/2 - \Delta z g + (\lambda/2)(L/d)w_2^2 = 0 \qquad (1)$$

dans laquelle $(z_2 - z_1) = \Delta z$ et $F = (\lambda/2)(L/d)w_2^2$.

Si le niveau d'eau dans le réservoir varie de z à z + dz, alors le volume d'eau évacué sera :

$$V = Ad(\Delta z) = (\pi D^2/4)d(\Delta z) = \pi(3,2)^2/4d(\Delta z) = 8,04dz \text{ m}^3$$

Par ailleurs, le volume élémentaire d'eau évacué dans l'intervalle de temps dt par la tubulure de vidange G_vdt, est égal au volume du réservoir vidé durant ce même intervalle de temps, $Ad(\Delta z)$.

Le temps de vidange nécessaire, pour que le niveau s'abaisse d'une quantité d'eau dH, sera :

$$\mathrm{d}t = Adz/G_v = Ad(\Delta z)/A_0 w_2 = 8,04dz/[\pi(0,150)^2/4]w_2 \qquad (2)$$

où $A_0 = (\pi d^2/4)w_2$ est l'aire de la section de la conduite de vidange.

En regroupant, il vient après remplacement dans l'équation (1) des valeurs de L et d :

$$w_2^2 - 2\Delta z g + \lambda(30/0,15)w_2^2 = 0$$

d'où :

$$w_2^2(1+ 200\lambda) = 19,62(\Delta z)$$

$$w_2 = 4,43(\Delta z)^{1/2}/(1 + 200\lambda)^{1/2}$$

En introduisant w_2 dans l'équation (2), on obtient pour dt :

$$\mathrm{d}t = 8,04d(\Delta z)/[\pi(0,150)^2/4][4,43(\Delta z)^{1/2}]/(1 + 200\lambda)^{1/2}$$

$$\mathrm{d}t = [102,75(1 + 200\lambda)^{1/2}](\Delta z)^{1/2}\mathrm{d}(\Delta z)$$

En supposant que λ reste constant le long de la conduite et en intégrant, entre les limites 5 et 2,5 m, on obtient :

$$t = 134,57[1 + 200\lambda]^{1/2}$$

Il vient après remplacement de $\lambda = 0,018$:

$$t = 134,57[1 + 200 \times 0,018]^{1/2}$$

$$\boldsymbol{t = 289 \text{ s}}$$

Énoncé 10.4

Calculer le poids à vide d'un réservoir en acier semblable à celui de la figure 10.2. L'enveloppe métallique est munie d'une isolation thermique en laine de verre d'une épaisseur δ_{is} = 100 mm. C_r = 1,15.

Solution 10.4

Pour le réservoir de la figure 10.2, on a :

- diamètre D = 1,600 m d'où $D_m = D + \delta \times 10^{-3}$ = 1,6 + 0,01 = 1,61 m

- longueur L_r = 4,93 m
- épaisseur de la paroi δ = 10 mm

En introduisant ces valeurs dans la relation 10.12, on obtient :

$$W_r = 240C_rD_m(L_r + 0{,}8D_m)\delta = 240 \times 1{,}15 \times 1{,}61(4{,}93 + 0{,}8 \times 1{,}61) \times 10$$

$$W_r = 27\ 630{,}3 \text{ N} = 27{,}63 \text{ kN}$$

On calcule le volume approximatif de l'isolation :

$$V_{is} = \pi D L_r \delta_{is} \times 10^{-3} = \pi \times 1{,}6 \times 4{,}93 \times 100 \times 10^{-3} = 2{,}48 \text{ m}^3$$

ce qui donne pour le poids :

$$W_{is}' = V_{is}\rho g = 2{,}48 \times 1\ 500 \times 9{,}81 = 3\ 644{,}6 \text{ N}$$

et en doublant cette valeur, on aboutit à :

$$W_{is} = 2 \times 3\ 644{,}6 \approx 7\ 290 \text{ N} = 7{,}29 \text{ kN}$$

Le poids total du réservoir et de l'isolation sera :

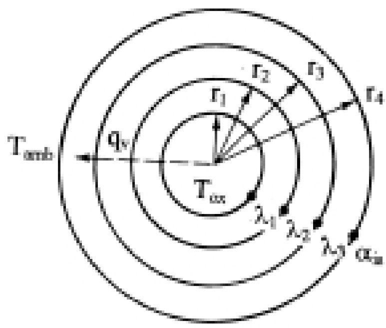
$$W_t = W_r + W_{is} = 27{,}63 + 7{,}29$$

$$\mathbf{W_t = 34{,}92\ kN}$$

Énoncé 10.5

Le stockage d'oxygène liquide se fait dans un réservoir de type sphère, isolé avec de la laine minérale et de la tôle d'aluminium.

Figure Ex.14 – Illustration pour l'énoncé 10.5.



Avec les notations données à la figure Ex.14, les dimensions de la paroi sphérique sont :

- r_1 = 1,6 m
- r_2 = 1,606 m

- r_3 = 1,706 m
- r_4 = 1,707 m

Les conductivités thermiques des matériaux sont respectivement :

- λ_1 = 59,3 W/m.K
- λ_2 = 0,037 W/m.K
- λ_3 = 160 W/m.K

Température de l'oxygène liquide : T_{ox} = 100 K
Taux de remplissage du réservoir : x = 95 %
Température de l'air ambiant : T_{amb} = 18 °C
Coefficient de transfert de chaleur par convection paroi-air : α_{is} = 4,5 W/m^2.K
Enthalpie d'évaporation de l'oxygène liquide : q_v = 215 kJ/kg

a) Calculer la puissance thermique absorbée par l'oxygène liquide dans le milieu ambiant.

b) Calculer le temps de stockage en admettant une perte tolérable d'oxygène liquide par évaporation de 1 %.

Solution 10.5

a) Les résistances thermiques des couches sphériques homogènes d'acier, de laine minérale et d'aluminium ont, respectivement, les valeurs :

$$R_1 = (1/4\pi\lambda_1)[(1/r_1) + (1/r_2)] = (1/4\pi \times 59{,}3)[(1/1{,}6) - (1/1{,}606)]$$

$$R_1 = 0{,}000003 \text{ °C/W}$$

$$R_2 = (1/4\pi\lambda_2)[(1/r_2) + (1/r_3)] = (1/4\pi \times 0{,}037)[(1/1{,}606) - (1/1{,}706)]$$

$$R_2 = 0{,}078499 \text{ °C/W}$$

$$R_3 = (1/4\pi\lambda_3)[(1/\mathrm{r}_3) + (1/\mathrm{r}_4)] = (1/4\pi \times 160)[(1/1{,}706) - (1/1{,}707)]$$

$$R_3 = 0{,}0000001 \text{ °C/W}$$

La résistance thermique totale est :

$$R_t = R_1 + R_2 + R_3 = 0{,}078502 \text{ °C/W}$$

L'équation de bilan énergétique permet d'écrire :

$$Q = (T_{ox} - T_{surf})/R_t = \alpha_{is}S(T_{surf} - T_{amb})$$

où T_{surf} est la température de la surface extérieure de l'isolation.
Il vient après remplacement :

$$(100 - T_{surf})/0{,}0785 = 4{,}5 \times 36{,}6(T_{surf} - 291)$$

$$T_{surf} = 277{,}5 \text{ K} = 4{,}5 \text{ °C}$$

Il est possible ensuite de déterminer le flux thermique absorbé par l'oxygène liquide avec $S = 4\pi(r_4)^2 = 4\pi(1,707)^2 = 36,6\ \mathrm{m}^2$:

$$Q = \alpha_{is} S(T_{surf} - T_{amb}) = 4,5 \times 36,6(277,5 - 291)$$

$$\boldsymbol{Q = -2\ 228\ \mathrm{W}}$$

Le signe moins montre que la chaleur est reçue par le système.

b) Le volume d'oxygène se trouvant dans le réservoir, en sachant que ce dernier est rempli à 95 %, aura la valeur :

$$V_{ox} = [4\pi(r_1)^3/3]x = [4\pi(1,6)^3/3] \times 0,95 = 16,3\ \mathrm{m}^3$$

Masse de l'oxygène liquide :

$$m_{ox} = V_{ox}\rho = 16,3 \times 1\ 140 = 18\ 572\ \mathrm{kg}$$

Quantité d'oxygène évaporée :

$$G = Q/q_v = 2\ 228/215 \times 10^3 = 0,01\ \mathrm{kg/s}$$

Quantité limite d'oxygène évaporée acceptée :

$$m_{ev} = (1/100)m_{ox} = 0,01 \times 18\ 572 = 185,7\ \mathrm{kg}$$

D'où le temps nécessaire pour le stockage de l'oxygène liquide :

$$t = m_{ev}/G = 185,7/0,01 = 18\ 570\ \mathrm{s}$$

$$\boldsymbol{t = 5,15\ \mathrm{h}}$$

Énoncé 10.6

La solution aqueuse d'un effluent malodorant, ayant une concentration $C_i = 0,2$ %, traverse un réservoir tampon à un débit $G = 2\ 000$ kg/h.

À la suite d'un accident dans le processus de production, la solution arrive à une concentration $C_0 = 2$ % pendant $t = 60$ min. On suppose le réservoir parfaitement agité et la concentration maximale admise dans la solution $C_{ad} = 0,25$ %.

Calculer la capacité (volume d'eau) du réservoir, afin de ne pas dépasser la concentration admise.

Solution 10.6

On peut déterminer le volume du réservoir en écrivant une équation de bilan matière au moment de l'incident. La différence entre la solution entrée et celle sortie constitue l'accumulation en produit malodorant. On a donc :

$$GC_0\Delta t - GC_{ad}\Delta t = V(C_{ad} + \Delta C) - VC_f$$

avec C_0 la concentration dans la solution d'alimentation après accident, C_{ad} la concentration maximale admise, C_i la concentration initiale dans le réservoir, $C_f = C_{ad}$ la concentration permise à la sortie du réservoir et ΔC la variation de la concentration durant un intervalle de temps Δt.

En regroupant et en tenant compte de $C_{ad} = C_f$, la relation précédente peut s'écrire :

$$G(C_0 - C_{ad}) = V\Delta C/\Delta t$$

Aux conditions de limite, quand $t \rightarrow 0$, on a $\Delta C/\Delta t = \mathrm{d}C/\mathrm{d}t$
Il s'ensuit :

$$G(C_0 - C_{ad}) = V\mathrm{d}C/\mathrm{d}t$$

d'où, en intégrant entre les limites C_i et C_{ad} :

$$\mathrm{d}t = (V/G)\int \mathrm{d}C/(C_0 - C)$$

$$t = -(V/G_w)\ln[(C_0 - C_{ad})/(C_0 - C_i)]$$

En substituant les valeurs numériques, avec $t = 1$ heure, on aboutit à :

$$1{,}0 = -(V/2\,000)\ln[(2{,}0 - 0{,}25)/(2{,}0 - 0{,}2)]$$

$$V = 71\,428 \text{ kg} = 71\,428/1\,000$$

$$\boldsymbol{V \approx 71{,}5\ \mathrm{m^3}}$$

Énoncé 10.7

Une centrale d'air comprimé est équipée d'un réservoir-tampon dont le fonctionnement se fait par une régulation de mise en marche et un arrêt automatique du moteur d'entraînement. Le compresseur aspire un débit $G_a = 1\,000$ m^3/h, à une température $T_a = 20$ °C et à la pression atmosphérique. Le refoulement se fait à la température $T_r = 30$ °C. La pression de refoulement est $p_r = 3$ bar. La fréquence de démarrage du compresseur est limitée à $n = 4$, soit un démarrage toutes les 15 minutes.

Calculer le débit de refoulement et le volume du réservoir-tampon.

Solution 10.7

Pour le domaine des pressions et des températures usuelles, l'air comprimé se comporte comme un gaz parfait ; ainsi avec la relation 10.33, on obtient pour le débit refoulé :

$$Q_r = Q_a(T_r/T_a)(p_a/p_r) = 1\,000 \times (303/293) \times (1{,}01/3) = 348{,}2 \text{ m}^3\text{/h}$$

En remplaçant le débit refoulé dans la relation 10.31 et en tenant compte de la fréquence de démarrage $n = 4$, on obtient la capacité du réservoir-tampon :

$$V = Q_r/4n = 348{,}2/(4 \times 4) = 21{,}76$$

$$\boldsymbol{V = 22\ \mathrm{m^3}}$$

Exemples d’application du chapitre 11
Mesures des fluides

Énoncé 11.1

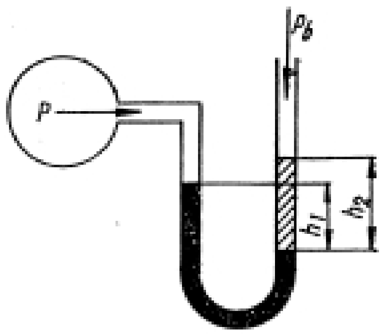
Calculer la pression absolue du gaz dans un réservoir, si la dénivellation de la colonne de mercure contenue par un tube coudé en forme de U (figure Ex.15), raccordé au réservoir, est Δz_1 = 133 mm. Dans la branche du tube en contact avec l’atmosphère, le niveau de l’eau se trouve à Δz_2 = 174 mm.

Pression atmosphérique : p_{atm} = 760 mg

Masse volumique du mercure : ρ_1 = 13 595 kg/m^3

Masse volumique de l’eau : ρ_2 = 1 000 kg/m^3

Figure Ex.15 – Illustration pour l’énoncé 11.1.



Solution 11.1

En se rapportant au niveau de référence, l’équilibre des pressions atmosphérique et hydrostatique du gaz permet d’écrire l’expression :

$$p = p_{atm} + \rho_2 g \Delta z_2 - \rho_1 g \Delta z_1$$

$$p = 760 \times 133{,}3 + 1\,000 \times 9{,}81 \times 0{,}174 - 13\,595 \times 9{,}81 \times 0{,}133$$

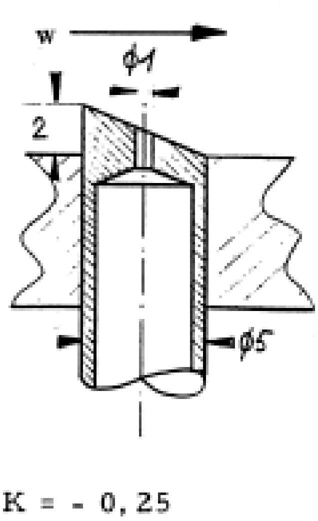
$$\mathbf{p = 85\,277\ N/m^2}$$

On remarque que le réservoir se trouve sous vide.

Énoncé 11.2

Une mesure de pression faite sur un tronçon de conduite indique la valeur de 2 bar relative. Une bavure à l’intérieur du tube, k_p = –0,25, provoque un cas pratiquement semblable à la figure Ex.16.

Figure Ex.16 – Illustration pour l'énoncé 11.2.



Calculer l'erreur de mesure sachant que la vitesse de l'eau (ρ = 1 000 kg/m^3) à cet endroit est de 6 m/s.

Solution 11.2

Par substitution des valeurs numériques dans la relation 11.10, on obtient :

$$P_R = P_I - k_p(\rho w^2/2) = 3 \times 10^5 - [-0{,}25(1\ 000 \times 6^2/2)] = 3{,}045 \times 10^5 \text{ N/m}^2$$

d'où on tire l'erreur :

$$\varepsilon = (P_R - P_I)/P_R = (3{,}045 - 3{,}0)105/3{,}045 \times 105 \cong 0{,}015$$

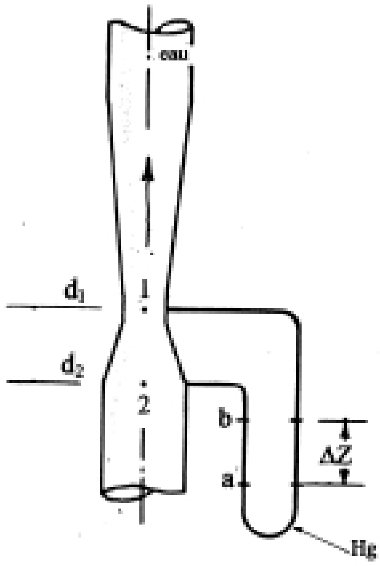
$$\boldsymbol{\varepsilon = 1{,}5\ \%}$$

Cette valeur n'est pas négligeable dans le cas d'une régulation de pression, par exemple.

Énoncé 11.3

Sur une conduite verticale d'eau, dont le sens d'écoulement est de bas en haut, est placé un débitmètre de type Venturi (figure Ex.17 avec d_1 = 10 mm et $d_2 = 10\sqrt{3}$). Un manomètre différentiel indique une dénivellation de mercure (Hg) constante Δh = 60 mm.

Figure Ex.17 – Illustration pour l'énoncé 11.3.



Calculer le débit volume dans la conduite, en supposant qu'il n'y a pas de pertes de charge entre les points 1 et 2, situés au niveau des branchements manométriques.

Solution 11.3

En écrivant l'équation de Bernoulli sous la forme habituelle (sans frottement) par rapport à une altitude comptée à partir d'une origine arbitraire et puisque $w_2 = v_1(d_1/d_2)^2$, on a la relation :

$$(p_2/\rho + z_2) - (p_1/\rho + z_1) = (w_1^2/2g) - (w_2^2/2g) = (w_1^2/2g)[1 - (d_1/d_2)^4] \quad (1)$$

Par ailleurs, la lecture du manomètre permet d'écrire par rapport aux points a et b :

$$p_a + \rho g z_a = p_2 + \rho g z_2$$

$$p_a + \rho_{Hg} g z_a = p_b + \rho_{Hg} g z_b$$

$$p_b + \rho g z_0 = p_1 + \rho g z_1$$

Il s'ensuit que :

$$(p_2/\rho + z_2) - (p_1/\rho + z_1) = \Delta h[(\rho_{Hg} - \rho)/\rho] \qquad (2)$$

En comparant les équations 1 et 2, on obtient :

$$w_1 = \{2g\Delta h[(\rho_{Hg} - \rho)/\rho]/[1 - (d_1/d_2)^4]\}^{1/2}$$

d'où le débit volume :

$$G_v = w_1(\pi d_1^2/4)$$

En portant les valeurs numériques, il vient :

$$\Delta h[(\rho_{Hg} - \rho)/\rho] = 0{,}06 \times [(13{,}6 - 1)/1] = 0{,}756$$

$$1 - (d_1/d_2)^4 = 1 - (1/3) = 2/3$$

$$w_1 = [2 \times 9{,}81 \times 0{,}756 \times (3/2)]1/2 = 4{,}71 \text{ m/s}$$

$$G_v = 4{,}71(\pi \times 0{,}1^2/4) = 0{,}0369 \text{ m/s}$$

$$\mathbf{G_v = 133{,}1\ m/h}$$

Énoncé 11.4

Un rotamètre étalonné pour de l'eau (ρ_{eau} = 1 000 kg/m^3) comporte un tube conique en verre long de 0,25 m, dont le diamètre intérieur est d_{sup} = 32 mm à la partie supérieure et d_{inf} = 24 mm à la partie inférieure. Le flotteur a un diamètre d_f = 24 mm, une masse volumique de 5 000 kg/m^3 et un volume V_f = 6,5 dm^3.

Coefficient de débit : C_G = 0,75

a) Calculer la hauteur à laquelle monte le flotteur dans le tube, si le débit masse d'eau traversant l'appareil est G = 0,1 m^3/s.

b) Calculer le facteur de correction dans le cas où l'on utilise l'appareil pour de l'acide sulfurique (ρ_{acide} = 1 800 kg/m^3).

Solution 11.4

a) L'aire des sections du tube aux deux extrémités est :

$$A_{sup} = \pi d_{sup}{}^2/4 = \pi \times 32^2/4 = 804 \text{ mm}^2$$

$$A_{inf} = \pi d_{inf}{}^2/4 = \pi \times 24^2/4 = 452 \text{ mm}^2$$

Aire de la section du flotteur : A_f = 452 mm

Afin de déterminer l'air annulaire d'écoulement A_2 (entre paroi et flotteur), on suppose que la parenthèse $[1 - (A_2/A_1)^2]^{1/2}$ dans la relation 11.13 est égale à 1.

Dès lors :

$$A_2 = G/C_G[2gV_f(\rho_f - \rho)\rho/A_i]$$

$$A_2 = 0{,}1/0{,}75[2 \times 9{,}81 \times 6{,}5 \times 10^{-6}(5\,000 - 1\,000)1\,000/452 \times 10^{-6}]$$

$$A_2 = 0{,}0001255 \text{ m}^2 = 125{,}5 \text{ mm}^2$$

On déduit le diamètre du tube pour cette surface en posant :

$$A_2 = \pi(d^2 - d_f{}^2)/4$$

$$d^2 = (4 \times 125{,}5/\pi) + 24^2 = 735{,}87$$

$$d = 27{,}12 \text{ mm}$$

La hauteur du flotteur dans le tube résulte de l'égalité :

$$z/H = (d - d_{inf})/(d_{sup} - d_{inf})$$

ce qui conduit à :

$$z = 0{,}25(27{,}12 - 24)/(32 - 24) = 0{,}0975 \text{ m}$$

Pour plus de précision, on refait le calcul en utilisant la valeur de A_2 dans la parenthèse :

$$[1 - (A_2/A_1)^2]^{1/2} = [1 - (4 \times 125{,}5/\pi \times 27{,}15^2)^2]^{1/2} = 0{,}953$$

$$A_2 = 125{,}5 \times 0{,}953 = 119{,}6 \text{ mm}^2$$

D'où le diamètre :

$$d^2 = (4 \times 119{,}6/\pi) + 24^2 = 728{,}35$$

$$d = 26{,}99 \text{ mm}$$

On obtient pour la hauteur du flotteur dans le tube :

$$z = 0{,}25(26{,}99 - 24)/(32 - 24) = 0{,}0934 \text{ m}$$

$$\boldsymbol{z = 93{,}4 \text{ mm}}$$

b) On calcule le facteur de correction :

$$f_{c1} = [\rho_1(\rho_f - \rho_2)/\rho_2(\rho_f - \rho_1)]^{1/2} = [1{,}0(5{,}0 - 1{,}8)/1{,}8(5{,}0 - 1{,}0)]^{1/2}$$

$$\boldsymbol{f_{c1} = 0{,}66}$$

Pour disposer du débit réel d'acide sulfurique, les valeurs indiquées par l'instrument sont à multiplier par 0,66.

Énoncé 11.5

Un débitmètre à section variable étalonné pour de l'air à 20 °C à la pression normale indique $G_{v,i}$ = 3,5 Nm^3/h sur un réseau d'air à 5 bar relatifs.

a) Calculer le débit réel d'air.

b) Quel est le facteur de correction si le débitmètre est utilisé pour de l'air à T = 60 °C ?

Solution 11.5

a) Puisque la pression d'étalonnage vaut p_1 = 1 bar absolu et la pression de service p_2 = 6 bar absolus, le facteur de correction f_{c2} sera donné par la relation 11.15 :

$$f_{c2} = [p_2/p_1]^{1/2} = [6/1]^{1/2} = 2{,}45$$

Ainsi le débit réel aura la valeur :

$$G_v = f_{c2}G_{v,i} = 2{,}45 \times 3{,}5$$

$$\boldsymbol{G_v = 8{,}58\ \mathrm{Nm^3/h}}$$

b) Le facteur de correction est calculé avec la relation 11.16 :

$$f_{c3} = [T_1/T_2]^{1/2} = [(273 + 20)/(60 + 273)]^{1/2}$$

$$\boldsymbol{f_{c3} = 0{,}938}$$

Énoncé 11.6

Calculer le débit d'un mélange de gaz naturels dans les conditions suivantes :

- température de travail $T_1 = 290$ K
- diamètre intérieur de la conduite $d = 300$ mm
- rugosité de la conduite $\Delta = 0{,}11$ mm
- pression à l'amont $p_1 = 4{,}2$ bar
- diamètre de l'orifice du diaphragme $d_o = 175$ mm
- chute de pression $\Delta p = 0{,}15$ bar
- densité normale du gaz $\rho_N = 0{,}72$ kg/m^3
- viscosité normale du gaz $\mu = 10{,}75 \times 10^{-6}$ Pa.s
- exposant adiabatique $\chi = 1{,}31$
- coefficient de compressibilité du gaz (pour T_1 et p_1) $Z = 0{,}992$

Solution 11.6

En utilisant les données précédentes, on peut déterminer le débit avec la relation 11.26. Le rapport des sections donne :

$$m = (d_o/d)^2 = (175/300)^2 = 0{,}3403$$

$$m^2 = 0{,}1158$$

La pression après le diaphragme étant $p_2 = p_1 - \Delta p = 4{,}2 - 0{,}15 = 4{,}05$ N/m^2, on obtient pour le rapport des pressions :

$$p_2/p_1 = 0{,}964$$

L'équation 11.25 permet de calculer le coefficient d'expansion du gaz :

$$Y = 1 - (0{,}3707 + 0{,}3184 \times 0{,}1158)[1 - (0{,}964)^{1/1{,}31}]^{0{,}935} = 0{,}986$$

En estimant Re = 10^5, on trouve dans le tableau 11.1, en fonction de Re et m^2, le coefficient de débit $C_G^* = 0{,}646$.
Il résulte pour le débit masse, après substitution dans la relation 11.26 :

$$q_m^* = 20{,}76 \times 0{,}3403 \times 0{,}646 \times 0{,}986 \times 300^2(0{,}72/0{,}992)^{1/2}(4{,}2 \times 0{,}15/290)^{1/2}$$

$$q_m^* = 16\ 081\ \mathrm{kg/h}$$

Enfin, on peut refaire le calcul, après avoir déterminé Re réel :

$$\mathrm{Re} = \rho wd/\mu = 4q_m/3\,600\pi d\mu = 4 \times 16\,081/3\,600 \times \pi \times 0{,}3 \times 10{,}75 \times 10^{-6}$$

$$\mathrm{Re} = 1{,}76 \times 10^6$$

Pour cette nouvelle valeur de Re, le coefficient de débit sera $C_G = 0{,}643$.
Puisque le rapport $d/\Delta = 2\,727 > 2\,000$, il est possible de négliger l'effet de la rugosité sur le débit. Ainsi, dans les conditions énoncées, le débit devient :

$$q_m = (C_G/C_G^*)q_m^* = (0{,}643/0{,}646) \times 16\,081 = 16\,014 \text{ kg/h}$$

$$\boldsymbol{q_m = 4{,}448 \text{ kg/s}}$$

Énoncé 11.7

Dans le dôme d'un réservoir à pression atmosphérique, un capteur à ultrasons mesure le niveau par réflexion d'onde. À vide, le volume du réservoir étant rempli seulement d'air à 20 °C, la distance entre le capteur et le fond du réservoir est parcourue par l'onde sonore en $t_1 = 35$ ms ; en présence de l'eau dans le réservoir, la durée de propagation devient $t_2 = 12$ ms.

a) Calculer le niveau de l'eau dans le réservoir.

b) Calculer l'erreur enregistrée sur la mesure du niveau si l'atmosphère qui surmonte l'eau est de la vapeur en ébullition (100 °C).

Solution 11.7

a) La célérité du son dans l'air à 20 °C peut se calculer avec la formule de Laplace :

$$c = [\chi p/\rho]^{1/2} = [1{,}407 \times 10^5/1{,}205]^{1/2} = 341{,}7 \text{ m/s}$$

dans laquelle $\chi = 1{,}407$ est l'exposant adiabatique de l'air à 20 °C et ρ est la masse volumique de l'air aux mêmes conditions.
Puisque la distance parcourue par l'onde sonore est L_1 à vide et L_2 en présence de l'eau, le niveau de liquide dans le réservoir Δz s'obtient avec l'expression :

$$\Delta z = L_1 - L_2 = c(t_1 - t_2)/2 = 341{,}7(35 - 12)10^{-3}/2$$

$$\boldsymbol{\Delta z = 3{,}93 \text{ m}}$$

b) En changeant de milieu (vapeur d'eau), la vitesse de l'onde sonore devient :

$$c = [1{,}324 \times 10^5/0{,}58]^{1/2} = 447{,}8 \text{ m/s}$$

avec $\chi = 1{,}324$ l'exposant adiabatique pour la vapeur d'eau à 100 °C
et $\rho_v = Mp/RT = 0{,}018 \times 10^5/8{,}314 \times 373 = 0{,}58$ kg/m^3 la masse volumique de la vapeur d'eau.
Le niveau du liquide déterminé dans ces conditions donne :

$$\Delta z = 447{,}8 \times (35 - 12) \times 10^{-3}/2 = 5{,}49 \text{ m/s}$$

valeur qui conduit à l'erreur :

$$\varepsilon = (5{,}49 - 3{,}93) \times 100/3{,}93$$

$$\varepsilon \approx \mathbf{39{,}7\ \%}$$

On remarque que ce type de capteur est très sensible à la nature du fluide gazeux qui le sépare de la surface réfléchissante.